I PRINCIPI DELLA MECCANICA

In queste note i principi della dinamica vengono formulati utilizzando soltanto le definizioni di accelerazione e velocità istantanee della Cinematica. Le lettere in grassetto indicano delle grandezze **vettoriali**.

1 Il primo principio della Dinamica

Il primo principio della Dinamica riguarda *un singolo punto materiale isolato* nell'Universo. Esso può essere enunciato così:
L'accelerazione di un singolo punto materiale isolato è nulla:

$$\boldsymbol{a} = 0 \tag{1}$$

Una formulazione equivalente è
Il moto di un singolo punto materiale isolato è rettilineo uniforme (o è fermo):

$$\boldsymbol{v} = \text{cost.} \tag{2}$$

Questo principio è noto anche come "principio di inerzia".

2 Il secondo principio della Dinamica

Il secondo principio della Dinamica riguarda *un sistema isolato di due o più punti materiali.* Il punto cruciale della Dinamica è che i diversi punti materiali del sistema interagiscono tra di loro, nel senso che il moto di uno influenza il moto degli altri. Più precisamente, le variabili cinematiche come velocità e accelerazione di più punti materiali in interazione non sono quantità indipendenti e, pertanto, esiste una relazione funzionale tra queste variabili.
Il secondo principio sancisce che questa relazione è particolarmente semplice se si considerano le accelerazioni dei punti materiali: infatti il secondo principio della Dinamica stabilisce che *le accelerazioni dei punti materiali in un sistema isolato sono legate linearmente tra di loro.* La dipendenza lineare è la più semplice dipendenza funzionale possibile tra vettori. Essa si esprime dicendo che se $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_N$ sono le accelerazioni dei corp1 $1, 2, \ldots, N$ del sistema isolato di N punti materiali, esistono delle quantità scalari $m_1, m_2, \ldots m_N$ tali che

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + m_N\boldsymbol{a}_N = 0. \tag{3}$$

La relazione (3) costituisce la formulazione matematica del secondo principio della dinamica purché si aggiungano le seguenti proprietà delle costanti $m_1, m_2, \ldots m_N$, proprietà sempre verificate in Natura:

1. Le quantità $m_1, m_2, \ldots, m_N$ sono costanti
2. Le quantità $m_1, m_2, \ldots, m_N$ sono tutte positive
3. La quantità m_1 è una proprietà del solo punto materiale 1, la quantità m_2 è una proprietà del solo punto materiale 2, ecc.

Le quantità $m_1, m_2, \ldots, m_N$ si chiamano *masse inerziali* dei rispettivi punti materiali. Nel caso di un singolo punto materiale, il secondo principio restituisce il primo principio.

2.1 La definizione operativa di massa

Il secondo principio permette di definire operativamente la massa inerziale di un punto materiale. Infatti esso fornisce un metodo per la misura della massa, una volta definito un campione di unità di misura. Sia m_1 la massa inerziale del punto materiale scelto come unità di misura. Per definizione, nel SI, m_1 è la massa inerziale del blocco di iridio depositato a Sèvre e vale 1 Kg. Per misurare la massa inerziale incognita m_2 di un secondo punto materiale, lo si pone in interazione con il campione di massa inerziale e si allontanano tutti gli altri corpi in modo che il sistema dei due punti materiali m_1 e m_2 sia isolato. Allora, per il secondo principio della Dinamica si ha

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = 0. \tag{4}$$

Una prima conseguenza della (4) e del fatto che m_1 e m_2 sono positive è che le accelerazioni dei due punti materiali hanno verso opposto. Una seconda conseguenza è che il rapporto tra i moduli delle accelerazioni

$$\frac{|\boldsymbol{a}_1|}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \tag{5}$$

fornisce il rapporto tra la massa incognita m_2 e quella campione m_1. La misura del rapporto dei moduli delle accelerazioni permette di determinare sperimentalmente, in linea di principio, almeno, il valore della massa inerziale del punto materiale incognito rispetto a quella del punto materiale campione.

Una conseguenza interessante della (5) è che, sebbene le accelerazioni dei due punti materiali cambino nel tempo, il rapporto tra i loro moduli resta costante.

2.2 La forza

Come visto, l'influenza di un moto su di un altro si esprime in maniera semplice con una relazione lineare tra le accelerazioni. Si può pensare che questa influenza tra i moti avvenga per il tramite di *forze* che un punto materiale esercita sull'altro. È naturale definire la forza agente su un qualunque punto materiale come il prodotto della sua massa inerziale (definita operativamente nel paragrafo precedente) e la sua accelerazione:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{6}$$

Da questa definizione di forza segue dalla (4) che la forza $\boldsymbol{F}_1 = m_1\boldsymbol{a}_1$ agente sul punto materiale 1 è opposta a quella, $\boldsymbol{F}_2 = m_2\boldsymbol{a}_2$ agente sul punto materiale due, cioè le (4) e (6) implicano, nel caso di due soli punti materiali

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2. \tag{7}$$

L'utilità di aver introdotto la nozione di forza è nel fatto che possiamo pensare, nel caso del sistema isolato di due punti materiali, che la forza $\boldsymbol{F}_1$ sul punto materiale 1 sia dovuta alla presenza del punto materiale 2 (sorgente della forza $\boldsymbol{F}_1$) e che, viceversa, la forza $\boldsymbol{F}_2$ su punto materiale 2 sia dovuta alla presenza del punto materiale 1 (sorgente della forza $\boldsymbol{F}_2$). In tal modo si rende evidente il carattere di reciprocità dell'interazione tra punti materiali: il punto materiale 2 esercita una forza sul punto materiale 1 e *viceversa*. La (7) specifica che le due forze in gioco sono opposte. Indicando esplicitamente la sorgente della forza come secondo pedice, la (7) si può scrivere come

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = -\boldsymbol{F}_{2,1},$$

che mette meglio in luce il fatto che si tratta di forze applicate a punti materiali diversi e aventi sorgente in punti materiali diversi. La (7) è spesso indicata come *principio di azione e reazione*. Il principio di azione e reazione segue dunque dal secondo principio della dinamica applicato a due punti materiali in interazione.

Nel caso di un sistema a N punti materiali, la (6) e la (3) portano a concludere che

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_N = 0. \tag{8}$$

Poiché $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_N$ sono forze che agiscono sui punti del sistema e che hanno sorgente all'interno del sistema stesso, vengono dette *forze interne* al sistema di punti materiali. Allora la (8) ci dice che *la risultante delle forze interne in un sistema di punti materiali isolato è sempre nulla.* Anche questa è una conseguenza del secondo principio della dinamica applicato ad N punti materiali in interazione.

2.3 La conservazione della quantità di moto

Avendo definito operativamente la massa inerziale e la velocità di un punto materiale, possiamo intrdurre la *quantità di moto* $\boldsymbol{p}$ di esso come il prodotto tra la massa inerziale e la velocità:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{9}$$

La quantità di moto totale di un sistema di N punti materiali è definita come la somma risultante delle quantità di moto dei singoli punti:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_N = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_N\boldsymbol{v}_N. \tag{10}$$

Prendendo la derivata rispetto al tempo e tenendo conto che le masse sono costanti, si trova

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + m_N\boldsymbol{a}_N. \tag{11}$$

Confrontando la (11) con la (3), si vede che $d\boldsymbol{P}/dt = 0$ e quindi

$$\boldsymbol{P} = \text{cost}. \tag{12}$$

In altre parole, *la quantità di moto totale di un sistema isolato di N punti materiali è costante nel tempo.* È, questo, il cosiddetto principio di conservazione della quantità di moto. Il secondo principio della Dinamica porta quindi ad un principio di conservazione e, precisamente, alla conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato di punti materiali. Nel caso di un singolo punto materiale il principio di conservazione si riduce alla (2).

3 Il terzo principio della Dinamica

Abbiamo visto che il secondo principio della Dinamica è espresso dalla relazione lineare (3) tra le accelerazioni dei punti del sistema. Il terzo principio della Dinamica postula un'altra relazione lineare tra le accelerazioni, che coinvolge esplicitamente le posizioni istantanee $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ degli N punti materiali. Infatti, il terzo principio della Dinamica dice che in ogni istante tra le accelerazioni e le posizioni degli N punti di un sistema isolato vale la relazione

$$m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{a}_1) + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{a}_2) + \ldots + m_N(\boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{a}_N) = 0. \tag{13}$$

Il terzo principio può essere espresso anche in funzione delle forze interne agenti sui punti del sistema. Infatti, per la definizione (6) di forza, l'equazione precedente diventa

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{F}_N = 0. \tag{14}$$

Data una forza $\boldsymbol{F}$ applicata al punto nella posizione $\boldsymbol{r}$, si dice momento $\boldsymbol{m}_O$ della forza rispetto all'origine O del sistema di coordinate la quantità

$$\boldsymbol{m}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{15}$$

In base a questa definizione, la (14) equivale a dire che dal terzo principio della Dinamica discende che *il risultante dei momenti rispetto all'origine delle forze interne ad un sistema isolato di punti materiali è nullo*[1]. In simboli

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{m}_{O,1} + \boldsymbol{m}_{O,2} + \ldots + \boldsymbol{m}_{O,N} = 0. \tag{16}$$

3.1 Il caso di due punti materiali

Nel caso di un sistema isolato di due soli punti, il terzo principio della Dinamica (14) si riduce a

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = 0. \tag{17}$$

D'altra parte, il secondo principio della Dinamica nella forma (7), permette di scrivere la equazione precedente come

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_1 = 0, \tag{18}$$

da cui si deduce che $\boldsymbol{F}_1$ ha la stessa direzione del vettore $\boldsymbol{r}_{2,1} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ che congiunge il punto materiale 1 al punto materiale 2. Naturalmente anche $\boldsymbol{F}_2$, essendo opposta a $\boldsymbol{F}_1$ per il secondo principio, è diretta come $\boldsymbol{r}_{2,1}$. Si vede così che le forze della coppia di azione-reazione tra due punti materiali sono opposte (secondo principio) e dirette lungo la congiungente i due punti (terzo principio). Il terzo principio pone dunque una limitazione sulle direzioni possibili delle forze di azione e reazione nel primo principio: le due forze sono dirette lungo la congiungente i due punti in interazione. Ne segue un'importante proprietà delle forze di interazione tra punti materiali: le forze possono essere soltanto o attrattive o repulsive.

3.2 La conservazione del momento angolare

Si chiama momento angolare o momento della quantità di moto di un punto materiale rispetto all'origine O la quantià

$$\boldsymbol{l}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}). \tag{19}$$

Il momento angolare totale $\boldsymbol{L}_O$ di un sistema di N punti materiali rispetto ad O è dato da

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{l}_{O,1} + \boldsymbol{l}_{O,2} + \ldots + \boldsymbol{l}_{O,N} = m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1) + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2) + \ldots + m_N(\boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{v}_N). \tag{20}$$

Prendendo la derivata rispetto al tempo della (20) e osservando che $d\boldsymbol{r}_i/dt = \boldsymbol{v}_i\ (i = 1, \ldots, N)$, si trova

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{a}_1) + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{a}_2) + \ldots + m_N(\boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{a}_N). \tag{21}$$

Confrontando questa relazione con la (13), si vede che il terzo principio della dinamica implica $d\boldsymbol{L}_O/dt = 0$, ovvero

$$\boldsymbol{L}_O = \text{cost.} \tag{22}$$

In altre parole, *il momento angolare totale di un sistema isolato di N punti materiali è costante nel tempo.* È, questo, il cosiddetto principio di conservazione del momento angolare. Anche il terzo principio della Dinamica porta dunque ad un principio di conservazione e, precisamente, alla conservazione del momento angolare totale di un sistema isolato di punti materiali. È interessante notare che la conservazione del momento angolare è valida anche per un singolo punto materiale isolato.

[1]Si vede facilmente che questo risultato non dipende dal punto dello spazio in cui è collocata l'origine O. Se infatti si sposta l'origine da O a O', ai tutti i vettori posizione $\boldsymbol{r}_i (i = 1, \ldots, N)$ si aggiunge lo stesso vettore $\overrightarrow{OO'}$, per cui alla (14) si aggiunge la quantità $\overrightarrow{OO'} \times (\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i) = 0$, per via del secondo principio nella forma (8). Il punto O (detto "polo") rispetto al quale sono calcolati i momenti nella (14) è pertanto un punto fisso arbitrario.

Nota. Le due leggi di conservazione della quantità di moto totale e del momento angolare totale di un sistema isolato di punti materiali sono conseguenze dirette del secondo e terzo principio, rispettivamente. Ma è vero anche il viceversa: è possibile cioè prendere queste due leggi di conservazione come principi primi e derivare da esse le (3) e (13). Nei testi di Meccanica Analitica si preferisce la formulazione dei principi come leggi di conservazione, perché queste ultime sono legate alle proprietà generali di invarianza dello spazio fisico. Precisamente, la conservazione della quantità di moto totale è conseguenza dell'invarianza traslazionale e la conservazione del momento angolare totale all'invarianza rotazionale dello spazio.

4 I principi della dinamica non sono sufficienti per impostare il problema generale del moto

I principi della dinamica non sono sufficienti per impostare un sistema *chiuso*[2] di equazioni da cui ricavare per via matematica i moti $\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t)$ degli N punti del sistema isolato. In questo, i principi della Dinamica differiscono dai Principi di Euclide, ad esempio, dai quali è possibile, viceversa, dedurre per via matematica tutta la geometria.

Per ottenere un problema di moto ben posto, ai principi della Dinamica occorre aggiungere altre ipotesi sulla natura delle forze di interazione interne al sistema. Esse sono

1. l'ipotesi dell'interazione a coppie
2. l'ipotesi dell'indipendenza delle forze
3. le leggi di forza

4.1 L'ipotesi dell'interazione a coppie

In Meccanica si suppone che i punti materiali interagiscano a due a due. Questo significa che, fissata l'attenzione sul punto i-esimo del sistema, la forza $\boldsymbol{F}_i$ agente su di esso è data dalla risultante delle forze $\boldsymbol{f}_{i,j}$ dell'interazione tra il punto dato e gli altri $N-1$, presi uno alla volta, cioè

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{i,j} \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{23}$$

Nella (23) si suppone $\boldsymbol{f}_{i,i} = 0$, si assume cioè che non esiste una sorta di auto-forza di un punto su se stesso. Il fatto che l'interazione avvenga per coppie di punti è espresso formalmente dal fatto che la forza di interazione $\boldsymbol{f}_{i,j}$ ha due indici: il primo indica il punto cui la forza è applicata e il secondo il punto sorgente di questa forza.

4.2 L'ipotesi dell'indipendenza delle forze

Questa ipotesi sancisce che la forza di interazione $\boldsymbol{f}_{i,j}$ tra il punto i e il punto j del sistema non dipende dalla presenza o meno degli altri punti del sistema stesso. Infatti, in generale, si potrebbe lecitamente pensare che la presenza di un terzo punto nelle vicinanze perturbi in qualche modo la forza di interazione tra due punti materiali assegnati. Ebbene, l'esperienza ci dice che questo non avviene.

[2] Per sistema chiuso di equazioni si intende un numero di equazioni indipendenti pari al numero di moti incogniti $\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t)$.

Una conseguenza dell'indipendenza delle forze è che per ogni coppia di punti i e j prefissata, valgono la (7) e la (18), come se i due punti fossero isolati. Dunque, per ogni i e j fissato abbiamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{i,j} &= -\boldsymbol{f}_{j,i} && (24) \\ (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{f}_{i,j} &= 0 && (25) \end{aligned}$$

Occorre a questo punto verificare che queste due relazioni siano compatibili con i principi della dinamica. La compatibilità con il secondo principio nella forma (8) si ottiene immediatamente sommando le (23) membro a membro: si ottiene, infatti, $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_{i,j} \boldsymbol{f}_{i,j} = 0$ per via della antisimmetria della (24). Per verificare la compatibilità delle (24) e (25) con il terzo principio, si può procedere nel modo seguente.

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{i,j} = \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{f}_{j,i} = -\sum_{i,j} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{f}_{i,j} \tag{26}$$

dove nel penultimo passaggio si sono scambiati tra loro gli indici muti di somma e nell'ultimo si è usata la (24). Dalla (26) si deduce

$$\sum_{i,j} (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{f}_{i,j} = -2 \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{27}$$

per cui la (25) implica la validità del terzo principio della Dinamica nella forma (14).

4.3 le leggi di forza

Per ottenere un sistema di equazioni chiuso da cui ottenere i moti $\boldsymbol{r}_i(t)$ degli N punti materiali occorre esprimere le forze interne di interazione $\boldsymbol{f}_{i,j}$ in funzione delle grandezze cinematiche (velocità, posizione) dei moti stessi. La relazione funzionale tra le forze $\boldsymbol{f}_{i,j}$ e le grandezze cinematiche delle particelle i e j coinvolte nell'interazione è detta *legge di forza*. In Meccanica si assume, di solito, che la legge di forza coinvolga soltanto i valori della posizione e velocità delle due particelle all'istante dato. La legge di forza dell'interazione tra le particelle i e j del sistema ha quindi la forma generale

$$\boldsymbol{f}_{i,j}(t) = \boldsymbol{f}_{i,j}(\boldsymbol{r}_i(t), \boldsymbol{r}_j(t), \boldsymbol{v}_i(t), \boldsymbol{v}_j(t), t). \tag{28}$$

Le leggi delle interazioni tra punti materiali sono dedotte, di solito, dall'esperimento. Si tratta cioè di leggi empiriche. Per le particelle elementari esistono teorie in grado di determinare le leggi delle forze di interazione (le cosiddette "interazioni fondamentali") da principi teorici generali. In ogni caso, le leggi di forza (28) devono essere assegnate *a priori*, prima di risolvere il problema del moto.