UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Corso di Laurea in FISICA

Appunti
sui
VETTORI

Anno Accademico 2017–2018

Rodolfo Figari
(nuova edizione a cura di Alberto Clarizia)

VETTORI

Un vettore è una entità matematica astratta: le entità matematiche sono spesso astrazioni di entità concrete utilizzate nelle scienze sperimentali. I vettori sono astrazioni di entità concrete utilizzate soprattutto nella fisica, e concettualmente molto diverse tra loro; in meccanica ad esempio: posizione di un corpo puntiforme, spostamento di un corpo puntiforme, velocità, accelerazione, quantità di moto, forza, momento di una forza, eccetera.

In matematica un vettore è un elemento di una particolare struttura algebrica, denominata Spazio Vettoriale (rimandiamo al corso di Geometria per lo studio di questa struttura algebrica). Qui vogliamo limitarci ad una introduzione finalizzata alla rappresentazione di grandezze fisiche.

Le grandezze fisiche di cui ci occuperemo in meccanica sono:

- grandezze scalari: completamente specificate assegnando un valore numerico e una unità di misura [esempi: lunghezza, tempo, superficie, volume, massa, densità, temperatura, lavoro, energia, ecc.]
- grandezze vettoriali: completamente specificate assegnando un valore numerico (detto modulo), una direzione, un verso e una unità di misura [esempi: spostamento di un corpo puntiforme, velocità, accelerazione, quantità di moto, forza, momento di una forza, eccetera]

Si tornerà su questa classificazione nella Sezione 6.

In fisica ci sono poi grandezze dette ***tensoriali***: la loro specificazione è più complicata e non ce ne occuperemo in questa introduzione.

1 Prototipi di vettore

1.1 Vettore posizione

Fissato un punto nello spazio tridimensionale, consideriamo l'insieme dei segmenti uscenti dal punto scelto (vedi la figura 1). Chiameremo "**vettore posizione**" un qualunque elemento di questo insieme.

In figura è sottolineata la corrispondenza tra l'insieme dei segmenti $(a, b, c, d,...)$ e l'insieme dei punti dello spazio. Fissata l'origine dei vettori posizione, ad ogni segmento è associato il suo punto finale e viceversa. I segmenti sono considerati "uscenti" dal punto O, hanno tutti dunque la stessa origine in O e sono "orientati"; diremo che O è il punto di applicazione e che i **vettori** hanno dunque il **verso** da O a P_i (con $i = a, b, c, d, ...$ oppure $i = 1, 2, 3, ...$). Per sottolineare questo aspetto, una freccia comparirà sull'estremo finale del segmento nella rappresentazione grafica del vettore e una freccia comparirà sulla lettera che indica il vettore $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},...)$.

Il segmento in quanto elemento della retta passante per i due estremi, senza precisare un verso, rappresenta la **direzione** del vettore: essa è quella comune a tutte le rette dello spazio che sono parallele a quella retta. Il **modulo** del vettore posizione è la lunghezza del segmento, cioè la distanza tra i due punti estremi del segmento (che è un numero reale positivo).

Per questi vettori, che nella figura per maggiore generalità sono rappresentati da segmenti indicati con $a, b, c, ...$, useremo spesso la notazione $\overrightarrow{OP_i}$ o anche, equivalentemente, la notazione $\vec{r}_i$.

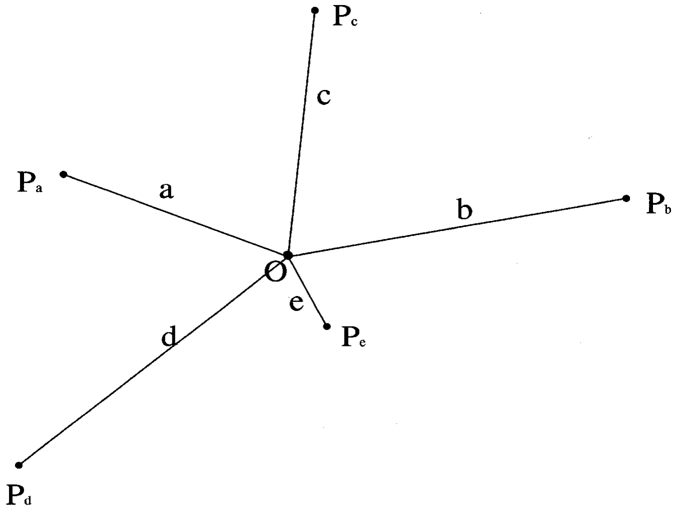

Figura 1: **vettori posizione**

Questi vettori hanno in comune il punto scelto come origine nello spazio.

1.2 Vettore spostamento

Ora, se consideriamo un qualunque punto dello spazio, P_i, ed un segmento orientato che va da P_i ad un altro punto qualsiasi, P_j, chiameremo "**vettore spostamento**" questo segmento orientato (vedi la figura 2).

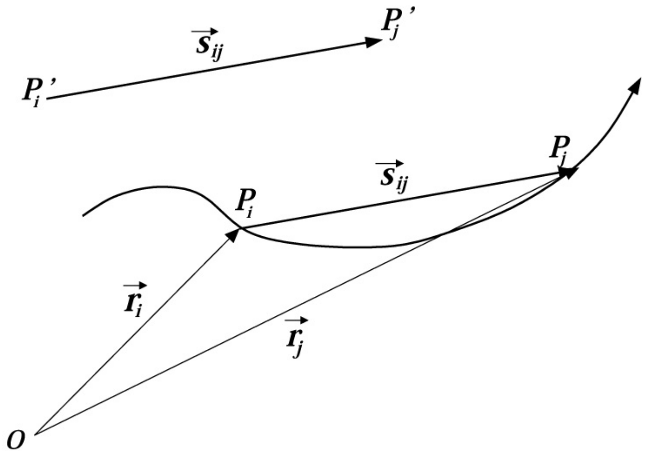

Figura 2: **vettore spostamento**

In realtà... a "spostarsi" è sempre un corpo materiale, C, che se osservato da lontano potrà essere considerato con ragionevole approssimazione **puntiforme** (lo chiameremo anche "punto materiale"): lo spostamento è quello del corpo C dal punto geometrico P_i al punto geometrico P_j, lungo una qualunque traiettoria, <u>non necessariamente rettilinea</u>, che passa per il punto P_i ad un certo istante e poi, ad un istante successivo, per il punto P_j. Lo spostamento tra i due istanti è il segmento orientato che congiunge P_i e P_j; per questo vettore useremo la notazione $\overrightarrow{P_iP_j}$, oppure $\vec{s}_{ij}$ o anche $\vec{r}_{ij}$.

Nella definizione dello spostamento il punto origine P_i non ha rilevanza: ogni segmento indica solo "verso dove" e "quanto lungo" è stato lo spostamento e non "da dove" è iniziato. In altri termini due spostamenti da punti diversi, P_i o P_i', saranno considerati identici (si dice anche equipollenti o equivalenti) se hanno la stessa direzione (sono dunque paralleli), lo stesso verso e lo stesso modulo. Si dice che possono essere ottenuti uno dall'altro per trasporto parallelo. Costituiscono un insieme infinito di elementi tutti equivalenti. Questi insiemi sono disgiunti (non hanno alcun elemento in comune), si chiamano "classi di equivalenza", rappresentate ciascuna da uno dei propri elementi. Per indicare un vettore spostamento generico scriveremo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{A}$, eccetera.

È opportuno citare che in molti testi questo tipo di vettore viene detto "vettore libero"; mentre per quei vettori per i quali si precisa anche un punto dello spazio in cui essi hanno origine si usa il termine "vettore applicato" (come il vettore posizione).

Molto spesso considereremo il sottoinsieme degli spostamenti piani, cioè l'insieme dei segmenti orientati giacenti in un piano.

Ripetiamo, gli elementi dell'insieme saranno **sempre** indicati con lettere sormontate da una freccia ($\overrightarrow{P_iP_j}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, ecc). Non essendoci la possibilità, nella normale scrittura con penna o matita, di eseguire il grassetto, sarà l'uso della freccia a indicare una grandezza vettoriale (e non sarà ammessa dimenticanza!).

Il modulo di uno spostamento $\vec{a}$, che non è altro che la lunghezza del segmento, verrà denotato con $\left|\vec{a}\right|$ (ATTENZIONE: si consentiranno solo poche eccezioni all'uso di questa notazione).

Considerazioni sulla definizione

Prima di iniziare la costruzione della struttura algebrica dell'insieme degli spostamenti vogliamo fare una breve digressione sul problema del rapporto tra modello matematico e realtà. Nella definizione di posizione e spostamento abbiamo fatto uso di enti geometrici "astratti" come rette, punti e segmenti; d'altro canto l'insieme degli spostamenti, munito della struttura algebrica e metrica che in seguito gli assoceremo, verrà utilizzato per descrivere e confrontare spostamenti di oggetti reali, in regioni diverse dello spazio che ci circonda. Questa corrispondenza tra mondo fisico e modello matematico sarà priva di ambiguità solo se possediamo la capacità operativa di:

- *individuare la posizione di "punti" con precisione, in principio, illimitata;*

- *tracciare concretamente segmenti di retta tra due punti qualunque (la linea più breve che li congiunge) e misurarne la lunghezza;*

- *condurre parallele ad un segmento dato a partire da un qualunque punto esterno al segmento stesso;*

- *possedere un metodo di misurazione delle lunghezze che sia indipendente dalla regione (dell'universo) in cui ci troviamo;*

- *verificare che i "segmenti fisici" tracciati possiedano le proprietà che via via andremo ipotizzando per gli spostamenti.*

Notiamo però che, ad esempio, l'esistenza di un unico segmento di retta tra due punti comunque assegnati, o l'esistenza di un'unica parallela ad una retta data, passante per un punto esterno alla retta, assieme a molte altre proprietà geometriche e metriche che assumeremo valide per gli spostamenti, sono assiomi della **geometria euclidea** *(o loro conseguenze) e sono verosimilmente, <u>ma non necessariamente</u>, proprietà dei segmenti che concretamente sappiamo tracciare!*

È ormai noto che le rette reali hanno proprietà che, sebbene appaiano "euclidee" e ben verificate sulla scala dei nostri laboratori (diciamo sulla scala del sistema solare), si discostano da quelle delle rette "euclidee" su scale di distanza estremamente grandi o estremamente piccole e/o in presenza di forti campi gravitazionali. Torneremo su questo punto in seguito.

Per concludere, ancora insistiamo su un punto, affinché non si generi confusione con il significato corrente della parola spostamento: la definizione non fa riferimento ad una traiettoria realmente percorsa (in generale una curva); quando si parlerà di spostamento di un corpo puntiforme, avvenuto tra due istanti di tempo, si farà riferimento solo al segmento di retta che congiunge la sua posizione iniziale con la sua posizione finale.

2 Operazioni sull'insieme degli spostamenti

<u>**Somma**</u>: dati due spostamenti nello spazio tridimensionale, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si definisce loro somma lo spostamento che si ottiene operando il secondo spostamento a partire dal punto finale del primo. In altre parole lo spostamento somma $\vec{a}+\vec{b}$ è la diagonale del parallelogramma costruito sui segmenti $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che parte dal punto iniziale (punto O nella figura 3):

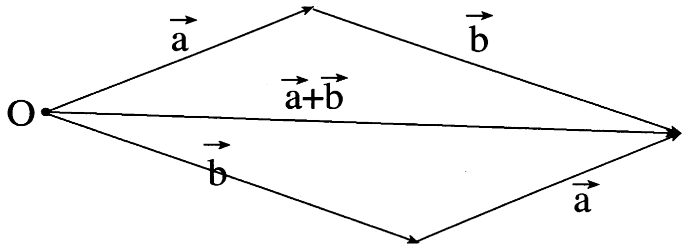

Figura 3: **somma di due spostamenti**

Per costruzione: $\quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad$ (**commutatività**);
si verifica inoltre che: $\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \quad$ (**associatività**).

Lo **spostamento nullo**, $\vec{0}$, è quello che ha la seguente proprietà: qualunque sia il vettore $\vec{a}$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

Per ogni spostamento $\vec{a}$ esiste lo **spostamento opposto** $-\vec{a}$, che sommato ad $\vec{a}$ dà lo spostamento nullo:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

Il segmento $-\vec{a}$ appartiene alla stessa retta di $\vec{a}$, ha la stessa lunghezza, ma verso opposto a quello di $\vec{a}$:

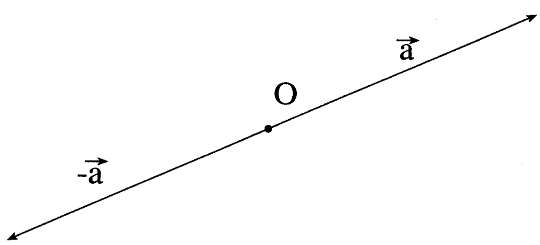

Figura 4: **spostamento opposto**

<u>**Differenza**</u>: per definizione si pone $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Come si vede chiaramente dalla figura 5, lo spostamento differenza $\vec{a}-\vec{b}$ coincide con il segmento che va dall'estremo di $\vec{b}$ all'estremo di $\vec{a}$ e che sommato a $\vec{b}$ dà $\vec{a}$ (l'altra diagonale del parallelogramma costruito sui segmenti $\vec{a}$ e $\vec{b}$).

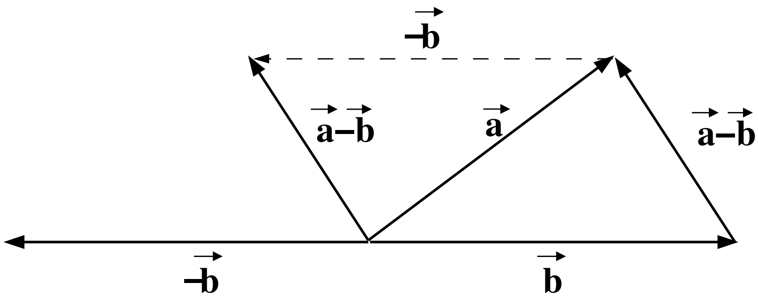

Figura 5: **differenza di due spostamenti**

Con questa definizione (e con la notazione introdotta in precedenza), osservando la figura 2 ci si può facilmente rendere conto che lo spostamento generico dal punto P_i al punto P_j dello spazio, rappresentati dai vettori $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_j$, è dato da:

$$\overrightarrow{P_iP_j} = \text{ (si indica anche:) } \vec{s}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \ ;$$

e questo vale qualunque sia il punto scelto come origine per i vettori posizione.
NOTA BENE: la lunghezza di uno spostamento che è somma o differenza di due spostamenti è ben diversa dalla somma o dalla differenza delle lunghezze dei due spostamenti. Si possono verificare, geometricamente, le due **disuguaglianze** (dette) **triangolari**:

$$\Big|\, |\vec{a}| - |\vec{b}| \,\Big| \leq \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$\Big|\, |\vec{a}| - |\vec{b}| \,\Big| \leq \left|\vec{a} - \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Prodotto per uno scalare: per ogni numero reale α e per ogni spostamento $\vec{a}$, definiamo lo spostamento:

$$\alpha\, \vec{a} \qquad \text{(“}\alpha\text{ volte lo spostamento } \vec{a}\text{ ”)}$$

come il segmento che sta sulla stessa retta di $\vec{a}$, ha lunghezza $|\alpha|\,|\vec{a}|$ ed è nello stesso verso di $\vec{a}$ se α è positivo, nel verso opposto se α è negativo:

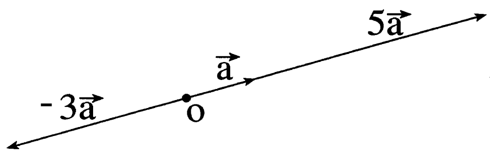

Figura 6: **moltiplicazione per uno scalare**

In particolare:

$$-\vec{a} = (-1)\, \vec{a}.$$

ESERCIZIO: verificare che $\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\, \vec{a} + \alpha\, \vec{b}$ (**distributività del prodotto per uno scalare rispetto alla somma**).

Definizione di Versore. Si dice **versore** di uno spostamento $\vec{a}$ il vettore (e non uno spostamento) che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{a}$ ed è definito:

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\, \vec{a}\ .$$

Dunque il versore ha modulo unitario e **non** ha dimensioni.

Prodotto scalare: dati due spostamenti[1], $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (vedi la figura 7), si definisce loro prodotto scalare il numero che si ottiene moltiplicando la lunghezza (modulo) del primo per la lunghezza (modulo) del secondo e per il coseno dell'angolo che essi formano: l'angolo tra due spostamenti (e in generale tra due segmenti orientati) è quello minore o uguale ad un angolo piatto una volta trasportati i due nello stesso punto di applicazione. Indicheremo il prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. E dunque:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\Theta$$

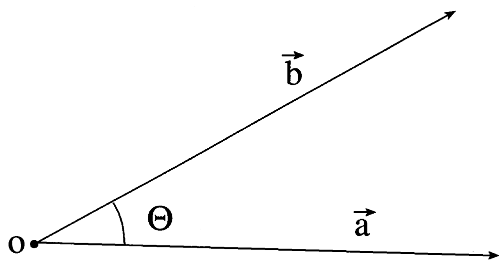

Figura 7: **prodotto scalare di due spostamenti**

Si noti che risulta irrilevante, per la definizione data, scegliere un verso per l'angolo: tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ o tra $\vec{b}$ ed $\vec{a}$, essendo $\cos\Theta = \cos(-\Theta) = \cos(2\pi - \Theta)$ (**commutatività del prodotto scalare**).

Se due spostamenti sono ortogonali il loro prodotto scalare è nullo, e viceversa.

Definizione di Componente ortogonale. Moltiplicare scalarmente un vettore qualsiasi, $\vec{b}$, per un versore, $\hat{a}$, equivale a: 1) considerare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{b}$ sulla retta individuata dal versore, questa proiezione è un segmento orientato; 2) prendere di questo segmento la lunghezza con il segno positivo o negativo a seconda se il verso della proiezione ortogonale è concorde o discorde con quello del versore.

Chiamiamo, dunque, questo prodotto scalare di $\vec{b}$ per $\hat{a}$ **la componente ortogonale** del vettore $\vec{b}$ lungo la retta orientata individuata dal versore $\hat{a}$ (alcuni autori usano lo stesso termine "proiezione ortogonale" per indicare la componente ortogonale).

Useremo questa notazione per indicare la componente ortogonale:

$$b_a = \vec{b} \cdot \hat{a}$$

Se moltiplichiamo la componente ortogonale (un numero) per lo stesso versore $\hat{a}$, otteniamo un vettore che chiameremo **il componente ortogonale**, o semplicemente **il componente**, del vettore $\vec{b}$ lungo la direzione parallela ad $\hat{a}$.

(ATTENZIONE: sul simbolo che indica una componente ortogonale di un vettore NON va messa la freccia, essa è un numero; se però il vettore di cui si considera la componente ortogonale ha bisogno di essere esplicitato in quanto vettore, allora si useranno le parentesi: ad esempio, se $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$, scriveremo $d_a = \vec{d} \cdot \hat{a} = (\vec{b} + \vec{c})_a$).

Dalla successiva figura 8 e dalla similitudine dei triangoli, risulta chiaro che $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è la moltiplicazione della lunghezza di uno spostamento per la componente ortogonale dell'altro lungo la direzione orientata del primo e che l'ordine è indifferente.

[1]In realtà, il prodotto scalare di due spostamenti non è grandezza fisica di significato rilevante, qui viene introdotto giusto per darne la definizione; come vedremo nel corso di Meccanica, si moltiplicano scalarmente vettori che rappresentano grandezze fisiche diverse, come ad esempio forza per spostamento.

In formule:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,(|\vec{b}|\cos\Theta) = |\vec{a}|\,(\hat{a}\cdot\vec{b}) = \text{(ma anche)}$$
$$= \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|\,(|\vec{a}|\cos\Theta) = |\vec{b}|\,(\hat{b}\cdot\vec{a})\ ,$$

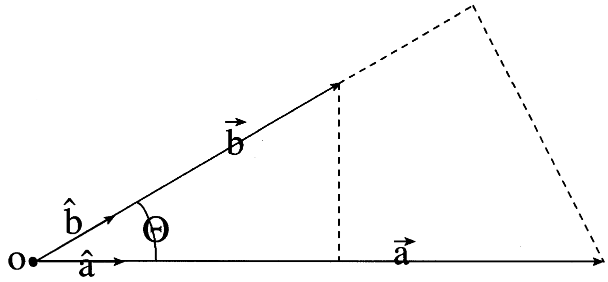

Figura 8: **prodotto scalare e proiezioni ortogonali**

infatti, dalla figura si vede che:

$$\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{\hat{a}\cdot\vec{b}}{\hat{b}\cdot\vec{a}} \quad .$$

In particolare, abbiamo:

$$\vec{a}^{\,2} \equiv\ \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2\,.$$

ESERCIZIO: verificare che $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (**distributività del prodotto scalare rispetto alla somma**) e che $\vec{a}\cdot(\alpha\,\vec{b}) = (\alpha\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha\,\vec{a}\cdot\vec{b}$ (senza bisogno, dunque, delle parentesi).

Utilizzando la proprietà distributiva del prodotto scalare, possiamo calcolare il quadrato della differenza di due vettori e si vede immediatamente che questa è una forma, assai facile da ricordare, del **Teorema di Carnot** per i triangoli qualsiasi (nella figura 9 i lati a, b e d corrispondono ai vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{d} = \vec{b}-\vec{a}$):

$$\left|\vec{d}\right|^2 = (\vec{b}-\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta\,.$$

Faremo usualmente riferimento a questa equazione quando parleremo del Teorema di Carnot nella risoluzione degli esercizi che incontreremo.

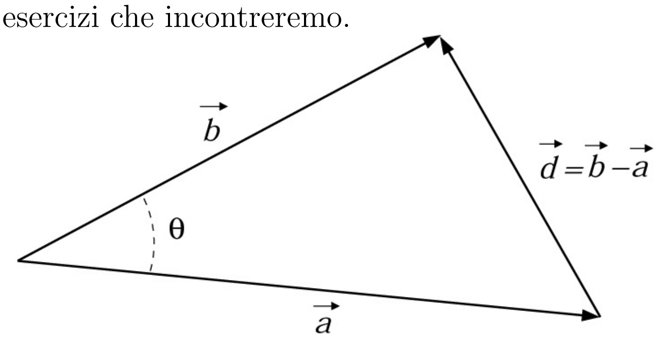

Figura 9: **triangolo qualsiasi e Teorema di Carnot**

Inoltre, la lunghezza di uno spostamento $\vec{c}$ ottenuto da due spostamenti consecutivi, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che è la lunghezza della diagonale del parallelogramma formato dai due vettori (vedi la figura 3, nella quale va inteso che θ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$), è data da:

$$|\vec{c}\,| = |(\vec{a}+\vec{b})| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta}$$

3 Sistemi di coordinate e rappresentazioni dei vettori

3.1 Nel piano

3.1.1 Coordinate polari

Fissato un punto O ("origine") ed una semiretta uscente da questo punto, un vettore posizione qualsiasi, $\vec{a}$, è univocamente definito dalla sua lunghezza, $\rho = |\vec{a}|$ numero reale positivo, e dall'angolo, $\theta \in [0, 2\pi)$, tra la semiretta scelta e il vettore $\vec{a}$, misurato in senso antiorario (per convenzione), come è mostrato nella figura 10.

ρ e θ si chiamano le **componenti polari** del vettore $\vec{a}$ o **coordinate polari** del punto P del piano individuato dal vettore. Se usiamo la notazione $\vec{r}_P$ o semplicemente $\vec{r}$ per indicare la posizione del punto P, spesso si indicherà la coordinata polare ρ anche con r. Il punto O è univocamente individuato da $\rho = 0$ (ovviamente θ non è definito in questo caso).

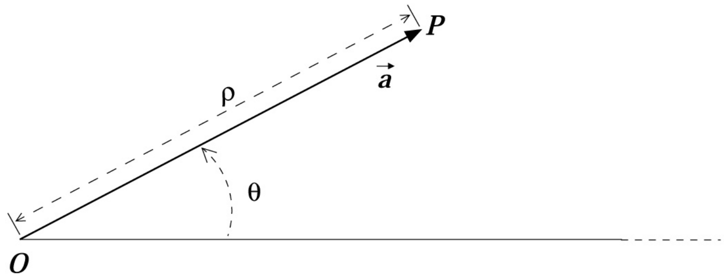

Figura 10: **coordinate polari**

3.1.2 Coordinate cartesiane ortogonali

Fissata un'origine O e due rette orientate ortogonali tra loro, x e y, intersecantisi in O, il vettore posizione $\vec{a}$ è univocamente definito dalle sue **componenti ortogonali**, a_x e a_y, rispetto alle due rette, che chiamiamo anche **coordinate cartesiane ortogonali** del punto P individuato dal vettore. Come si vede dalla figura 11, queste coordinate sono allora numeri reali positivi (lato positivo della retta) o negativi (lato negativo della retta). Le rette sono dette, usualmente, assi cartesiani ortogonali.

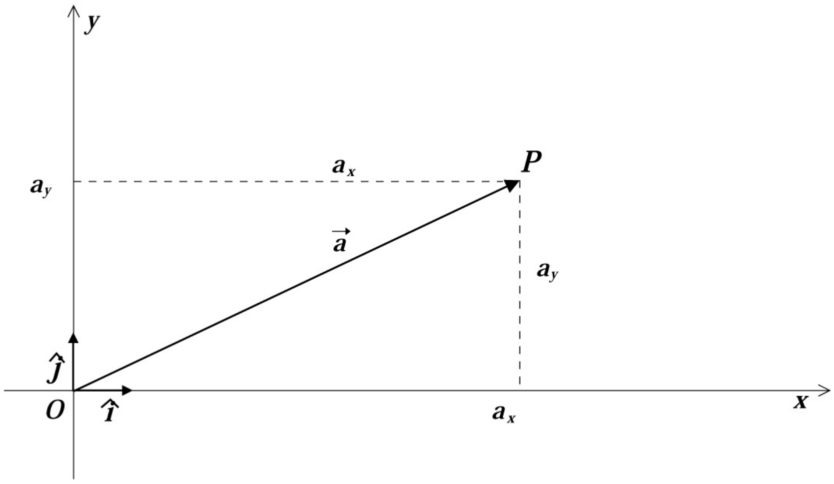

Figura 11: **coordinate cartesiane ortogonali**

Se chiamiamo $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ i versori delle rette x e y (nel corso di Geometria sono detti "Base"), si vede facilmente che:

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath}\,; \tag{1}$$

possiamo chiamare $a_x\,\hat{\imath}$ e $a_y\,\hat{\jmath}$ i "vettori componenti" di $\vec{a}$ lungo gli assi x e y e la relazione (1) è la scomposizione di $\vec{a}$, secondo gli assi, in questi due vettori componenti.

I versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ hanno le proprietà che $\hat{\imath}^{\,2} = \hat{\jmath}^{\,2} = 1$ e $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$.

Se usiamo la notazione $\vec{r}$ per indicare la posizione del punto P, le componenti o coordinate cartesiane ortogonali saranno semplicemente indicate con x e y:

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}\,.$$

<u>Osservazione</u>: *gli assi cartesiani possono anche essere non ortogonali (e così anche i relativi versori). In questi sistemi, le componenti cartesiane del vettore $\vec{a}$ si definiscono coerentemente con la necessità di avere, per $\vec{a}$, una scomposizione identica alla (1): dunque, si conducono, per il punto estremo del vettore, le rette parallele agli assi e s'individuano i punti d'intersezione con l'altro asse, si ottengono così due segmenti orientati (sempre applicati in O), che sono i vettori componenti di $\vec{a}$; allora, le componenti cartesiane del vettore $\vec{a}$, a_x e a_y, sono date dalle lunghezze "con il segno" di questi segmenti (segno positivo o negativo a seconda se il verso del segmento è concorde o discorde con quello dell'asse). Si badi bene: in questi sistemi le componenti cartesiane di un vettore NON coincidono con le componenti ortogonali rispetto agli stessi assi.*

I sistemi cartesiani ortogonali sono, invece, **caratterizzati** dalla seguente relazione:

$$a_x = \vec{a}\cdot\hat{\imath} \qquad \text{e} \qquad a_y = \vec{a}\cdot\hat{\jmath}\,.$$

Nel corso di Meccanica useremo soltanto assi cartesiani ortogonali.
In questi sistemi di riferimento, si può scrivere (un'espressione del Teorema di Pitagora):

$$|\,\vec{a}\,|^{\,2} = a_x^2 + a_y^2\,.$$

Le relazioni tra componenti polari e componenti cartesiane ortogonali di un vettore si ottengono facilmente:

<u>da polari a cartesiane:</u>	<u>da cartesiane a polari:</u>	
$a_x = \rho\,\cos\theta$	$\rho = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$	
$a_y = \rho\,\sin\theta$	$\theta = \arctan\dfrac{a_y}{a_x}$	(la scelta del quadrante è dettata dai segni di a_x e a_y)

3.2 Nello spazio

3.2.1 Coordinate sferiche

Si fissi arbitrariamente nello spazio tridimensionale un'origine O, una semiretta uscente dall'origine ed un qualunque piano che la contenga, *piano di riferimento* (si veda la successiva figura 12).

Ad ogni vettore posizione $\vec{a}$ (e ad ogni punto P dello spazio) sono univocamente associati:

- la lunghezza $\rho = |\vec{a}|$ (numero reale positivo),
- l'angolo $\theta, \in [0, \pi]$, tra la semiretta scelta e il vettore. Quest'angolo è detto anche "colatitudine" del punto P sulla superficie sferica di raggio ρ,
- e l'angolo $\varphi, \in [0, 2\pi)$, tra il piano di riferimento e il piano contenente $\vec{a}$ e la semiretta scelta, in senso antiorario (guardando dal lato della semiretta). Quest'angolo è detto anche "longitudine" del punto P sulla superficie sferica di raggio ρ.

ρ, θ e φ si dicono **componenti sferiche** del vettore $\vec{a}$ o **coordinate sferiche** del punto dello spazio individuato dal vettore.

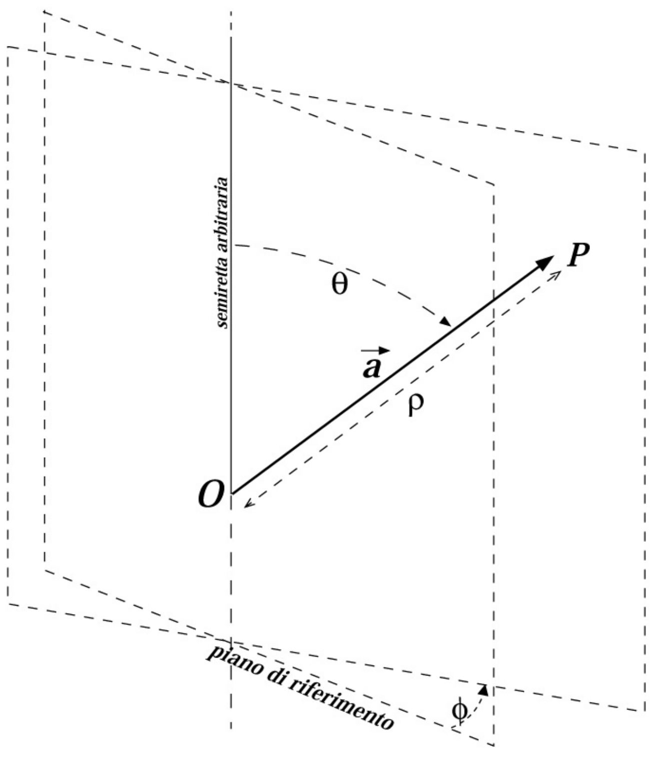

Figura 12: **coordinate sferiche**

3.2.2 Coordinate cartesiane ortogonali

In analogia con quanto fatto nel caso bidimensionale, fissata un'origine O e tre rette orientate a due a due ortogonali tra loro, x y e z, intersecantisi in O, il vettore posizione $\vec{a}$ è univocamente definito dalle sue **componenti ortogonali** rispetto alle tre rette orientate, a_x, a_y e a_z, che chiamiamo anche **coordinate cartesiane ortogonali** del punto P (per brevità anche solo "coordinate"). Le rette sono dette assi cartesiani ortogonali.

Se chiamiamo $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ i versori delle rette x, y e z (la Base), potremo scrivere che:

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k} \qquad [\,\textbf{si usa anche la notazione:}\ \ \vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)\,]\ .$$

E naturalmente vale che:

$$a_x = \vec{a}\cdot\hat{\imath} \quad \text{e} \quad a_y = \vec{a}\cdot\hat{\jmath} \quad \text{e} \quad a_z = \vec{a}\cdot\hat{k}\ ;$$

e inoltre che:

$$\hat{\imath}^{\,2} = \hat{\jmath}^{\,2} = \hat{k}^{\,2} = 1 \qquad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0 \;.$$

Si noti che, scelte le tre rette x, y e z, si verifica uno dei due casi:

- dal lato positivo dell'asse z si osserva, nel piano $x - y$, il verso che va dal semiasse positivo x al semiasse positivo y: se questo verso è antiorario la terna è detta **destrorsa**;

- dal lato positivo dell'asse z si osserva, nel piano $x - y$, il verso che va dal semiasse positivo x al semiasse positivo y: se questo verso è orario la terna è detta **sinistrorsa**.

Per lo più useremo per convenzione terne destrorse (in accordo con la "**regola del cavatappi**", che troveremo più avanti). È facile verificare che la caratteristica di essere destrorsa o sinistrorsa si mantiene per permutazione ciclica dei nomi assegnati agli assi ($x, y, z \to y, z, x \to z, x, y$), mentre cambia se la permutazione non è ciclica o se un numero dispari di semirette viene sostituito con le semirette di verso opposto ($x, y, z \to y, x, z$ oppure $x, y, z \to -x, y, z$ oppure $x, y, z \to -x, -y, -z$).

Le relazioni tra componenti sferiche e componenti cartesiane ortogonali di un vettore sono le seguenti:

da sferiche a cartesiane:	da cartesiane a sferiche:
$a_x = \rho \sin\theta\, \cos\varphi$	$\rho = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
$a_y = \rho \sin\theta\, \sin\varphi$	$\theta = \arccos \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$
$a_z = \rho \cos\theta$	$\varphi = \arctan \dfrac{a_y}{a_x}$ (la scelta del quadrante nel piano $x - y$ è dettata dai segni di a_x e a_y)

Possono essere ricavate facilmente con utile esercizio.

4 Le operazioni sui vettori posizione e spostamento nel sistema di coordinate cartesiane ortogonali

Le operazioni sui vettori posizione e sui vettori spostamento sono state definite in maniera intrinseca, cioè senza fare riferimento ad una particolare rappresentazione in un sistema di coordinate. Ci limiteremo, ora, a vedere come si scrivono le stesse operazioni sui numeri che individuano i vettori posizione nel sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Tralasceremo la considerazione degli altri sistemi di coordinate, anche perché in alcuni casi è un po' complicato ottenere le espressioni che traducono le varie operazioni. Vedremo come sono facilmente rappresentate queste operazioni sui vettori spostamento: avremo una rappresentazione cartesiana dello spazio degli spostamenti.

4.1 Nel piano

4.1.1 Somma e differenza

Lo spostamento generico è quello da un punto P_1 ad un punto P_2. Questo è dato dalla differenza dei due vettori:

$$\vec{r}_1 = x_1\,\hat{\imath} + y_1\,\hat{\jmath} \qquad \vec{r}_2 = x_2\,\hat{\imath} + y_2\,\hat{\jmath}\,.$$

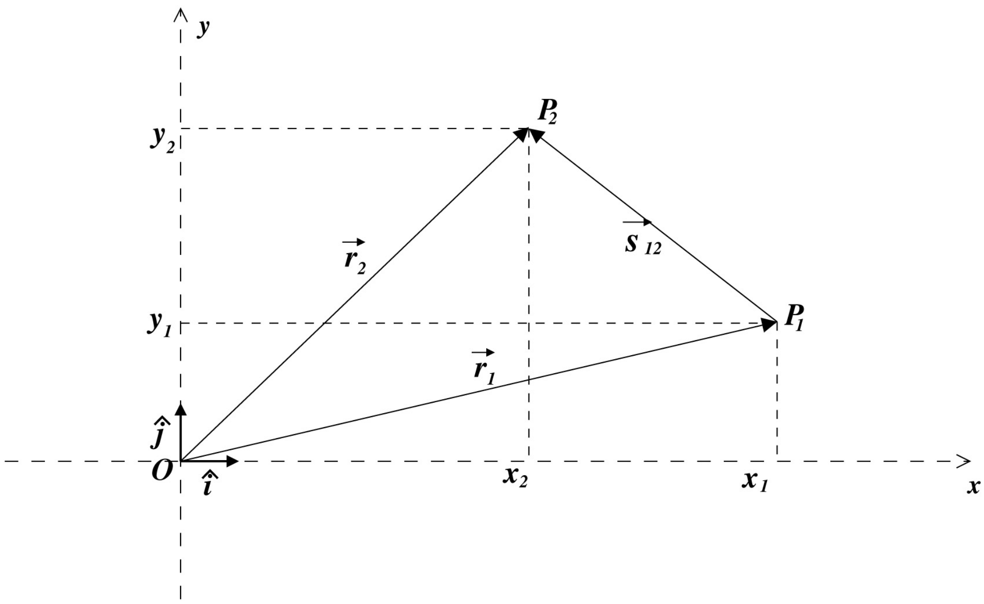

Figura 13: **rappresentazione di uno spostamento**

Si ha, in maniera evidente (vedi la figura 13), che:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{s}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath}\,.$$

Se $\vec{a} = (a_x,\, a_y)$ e $\vec{b} = (b_x,\, b_y)$ sono due spostamenti, in maniera analoga (vedi la figura 14), si ha che:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\,\hat{\imath} + (a_y + b_y)\,\hat{\jmath}$$

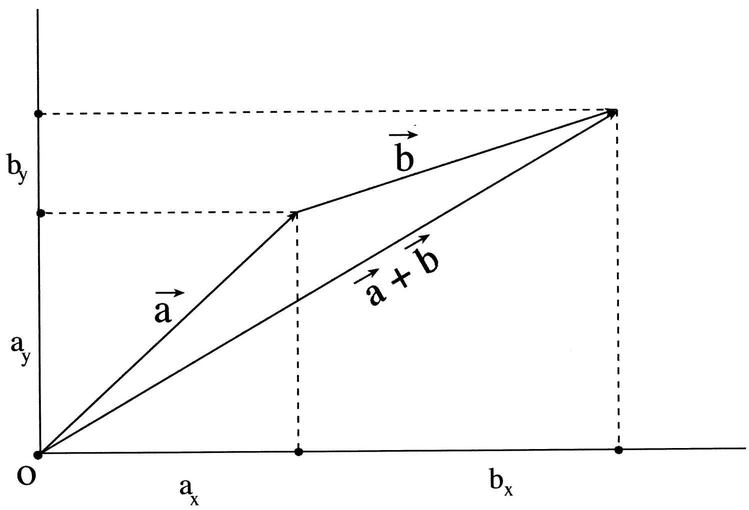

Figura 14: **la componente della somma di due spostamenti è la somma delle due componenti**

4.1.2 Prodotto per uno scalare

Se $\vec{a} = (a_x,\, a_y)$ è uno spostamento e λ è un numero reale, dalla similitudine dei triangoli (vedi la figura 15) risulta che:

$$(\lambda\vec{a})_x = \lambda\, a_x \qquad (\lambda\vec{a})_y = \lambda\, a_y$$

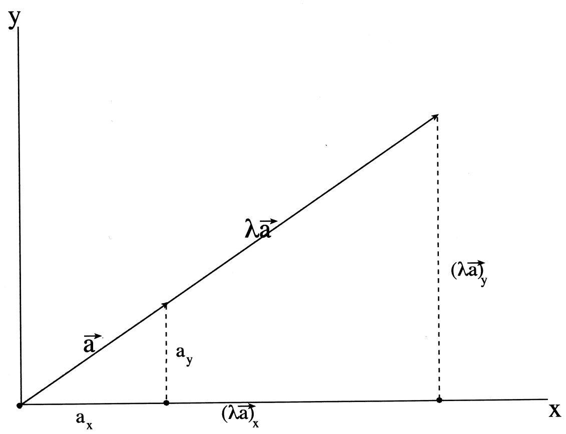

Figura 15: **prodotto per uno scalare**

4.1.3 Prodotto scalare

Se $\vec{a} = (a_x,\, a_y)$ e $\vec{b} = (b_x,\, b_y)$ sono due spostamenti (vedi la successiva figura 16), poiché:

$$\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_2 \sin\theta_1$$

e inoltre:

$$\cos\theta_1 = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \cos\theta_2 = \frac{b_x}{|\vec{b}|} \qquad \sin\theta_1 = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \sin\theta_2 = \frac{b_y}{|\vec{b}|} \quad ,$$

allora si ha:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}|\, \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y \quad .$$

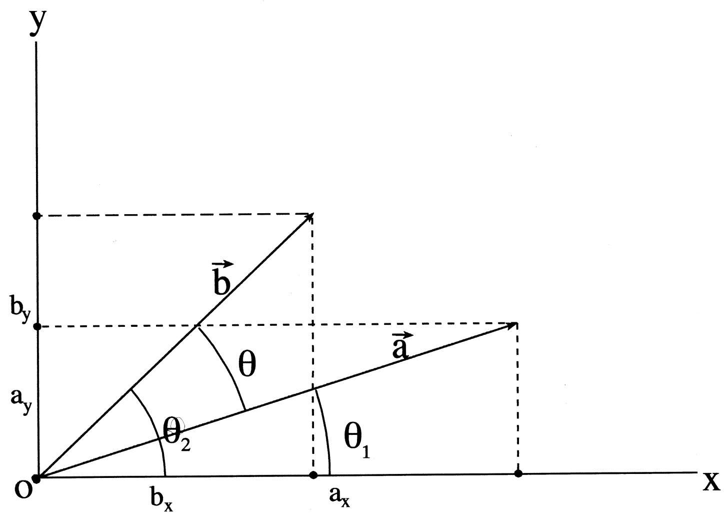

Figura 16: **prodotto scalare**

In alternativa, si ottiene lo stesso risultato dalle proprietà già viste dei versori degli assi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath})\cdot(b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath}) = a_x b_x\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + a_y b_y\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + a_x b_y\,\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + a_y b_x\,\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = a_x b_x + a_y b_y\ ;$$

e quindi, per il quadrato di uno spostamento:

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2\ .$$

4.2 Nello spazio

La generalizzazione allo spazio tridimensionale è piuttosto facile, per le proprietà già viste delle operazioni sugli spostamenti e per le proprietà dei versori degli assi.

4.2.1 Somma e differenza

Si ha:

$$(\vec{a}+\vec{b})_x = (\vec{a}+\vec{b})\cdot\hat{\imath} = a_x + b_x \qquad (\vec{a}+\vec{b})_y = (\vec{a}+\vec{b})\cdot\hat{\jmath} = a_y + b_y$$
$$(\vec{a}+\vec{b})_z = (\vec{a}+\vec{b})\cdot\hat{k} = a_z + b_z\ ;$$

sostituendo ad $\vec{a}$ l'espressione $a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}$, e analogamente per $\vec{b}$, e poi applicando le proprietà delle operazioni.

4.2.2 Prodotto per uno scalare

Si ha ovviamente:

$$(\lambda\vec{a})_x = \lambda\,a_x \qquad (\lambda\vec{a})_y = \lambda\,a_y \qquad (\lambda\vec{a})_z = \lambda\,a_z\ .$$

4.2.3 Prodotto scalare

Se $\vec{a} = (a_x,\,a_y,\,a_z)$ e $\vec{b} = (b_x,\,b_y,\,b_z)$ sono due spostamenti qualsiasi nello spazio, si ha:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ ;$$

e quindi:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Dalla prima relazione si ottiene l'equazione importante per trovare l'angolo tra due spostamenti di cui sono note le componenti:

$$\theta = \arccos\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

N.B. Le operazioni sugli spostamenti risultano particolarmente semplici in coordinate cartesiane ortogonali. Essendo operazioni lineari (somma e moltiplicazione per uno scalare) e bilineari (prodotto scalare) non deve stupire che assumano una forma semplice sugli spostamenti quando questi vengono rappresentati come combinazioni lineari di tre spostamenti ortogonali unitari. Inoltre le operazioni definite in coordinate cartesiane ortogonali si generalizzano immediatamente a qualunque dimensione e per questo sono le uniche coordinate che appaiono nello studio degli spazi vettoriali (vedi corso di Geometria).

L'insieme degli spostamenti, con la sua struttura algebrica (somma e prodotto per uno scalare) e metrica (prodotto scalare), definisce lo "spazio vettoriale euclideo" a due e tre dimensioni che viene studiato, in un ambito di maggiore generalità, nel corso di Geometria. Tramite gli spostamenti è possibile costruire figure piane (ad esempio i poligoni regolari, cerchi etc) e delimitare regioni dello spazio (ad esempio i solidi regolari) le cui proprietà ci sono state insegnate nei primi anni di scuola.

Tra le proprietà dimostrate per le figure geometriche ricordiamo per esempio:

- *la somma degli angoli interni di un triangolo è di* $180°$*;*

- *per un triangolo qualunque vale il Teorema di Carnot (in particolare vale il teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli);*

- *il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo raggio vale* 2π*.*

Come abbiamo già notato nei commenti alla definizione di spostamento, gli enti geometrici punto, retta, ecc. sembrano adatti a descrivere lo spazio intorno a noi; gli assiomi della geometria euclidea (per esempio quello delle parallele) sembrano perfettamente soddisfatti da "punti e rette reali" e le loro conseguenze sono pertanto proprietà ben verificate nei cerchi e nei triangoli che possiamo fisicamente disegnare o ricostruire strumentalmente, almeno sulle scale di lunghezza accessibili all'esperienza quotidiana (anche se raffinata dall'uso di sofisticati strumenti scientifici). La verifica sperimentale della validità della geometria euclidea come modello per lo spazio diventa però problematica nell'infinitamente piccolo e nell'infinitamente grande, o in condizioni comunque molto diverse dall'esperienza quotidiana. Alla fine del secolo XIX, fu dimostrata la non contraddittorietà di geometrie basate su insiemi di assiomi differenti da quelli della geometria euclidea. Quest'ultima rimase per qualche decennio la geometria che descriveva la realtà, ma perse lo status di unica geometria teoricamente possibile. All'inizio del secolo XX (1915 - 1917) Einstein propose la teoria della Relatività Generale: lo spazio ed il tempo erano contemporaneamente descritti da una geometria a quattro dimensioni, la cui struttura era localmente tanto meno euclidea quanto più elevate erano le densità di materia e di energia presenti. Negli stessi anni la Meccanica Quantistica, nata per descrivere la dinamica delle particelle che costituiscono gli atomi, poneva severe limitazioni alla possibilità di usare concetti classici di "posizione" in ambito microscopico.

Esperimenti di grande precisione hanno dimostrato la validità della Relatività Generale su grande scala (rimane ancora aperto il problema di costruire una teoria che inglobi Relatività Generale e Meccanica Quantistica). Sono oggi disponibili strumenti tecnologici commerciali che calcolano i loro dati tenendo conto di correzioni dovute alla natura "non euclidea" dello spazio-tempo (ad esempio il GPS, *strumento che fornisce la posizione sulla superficie terrestre tramite segnali provenienti da satellite, estensivamente utilizzato nella navigazione da diporto). Per avere un'idea di come fattori di scala possano drasticamente cambiare la realtà delle osservazioni sulla geometria dello spazio circostante è utile riferirsi a superfici bidimensionali, che facilmente riusciamo a visualizzare, e domandarsi su quale scala la geometria euclidea piana risulterebbe ben verificata. Consideriamo, allora, come spazio a 2 dimensioni, la superficie di una sfera di raggio R (vedi la figura 17).*

- Su tale superficie, fissati tre punti e tracciate le linee più corte che li congiungono, si ottiene una figura geometrica con tre lati, un triangolo: solo per una scala di dimensioni lineari piuttosto piccola si può dire che approssimatamente la somma degli angoli interni di tale figura è di $180°$ *(in figura, nel triangolo grande raffigurato la somma è sicuramente maggiore di* $180°$*, essendo angoli retti gli angoli nei vertici 2 e 3).*

- Su tale superficie, solo per una scala di dimensioni lineari piuttosto piccola si può dire che il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo raggio vale 2π *(provare a visualizzare o a disegnare una circonferenza, sulla superficie sferica, per la quale in maniera evidente il rapporto tra la sua lunghezza e il raggio non è uguale a* 2π*).*

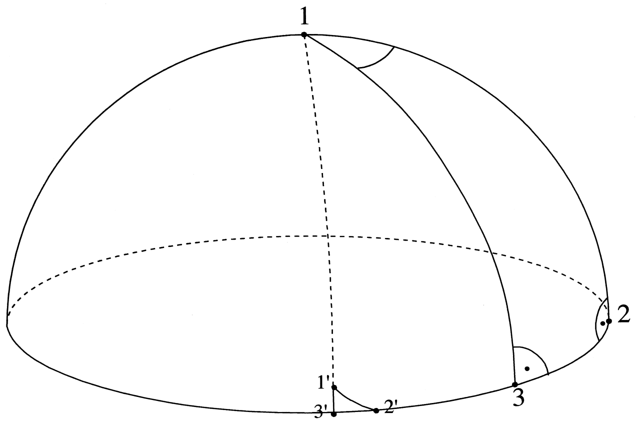

Figura 17: **triangoli nel mondo di *Flatlandia***

---

5 Variazione delle componenti di uno spostamento per cambiamento degli assi cartesiani ortogonali

5.1 Nel piano

Se $\vec{a}$ è uno spostamento, di componenti ortogonali a_x e a_y nel sistema di assi cartesiani ortogonali definito dalle semirette (positive) x e y, quali saranno le sue componenti relativamente ad un altro sistema cartesiano ortogonale definito da due semirette x' e y', di origine coincidente con il primo sistema e ruotate di un angolo θ rispetto a x e y, come descritto nella figura 18 ?

Nella figura sono rappresentati anche i versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ degli assi x e y, nonché $\hat{\imath}'$ e $\hat{\jmath}'$ degli assi x' e y'. Ebbene, sappiamo che nella rappresentazione del vettore $\vec{a}$ nel sistema x-y,

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath}\ ,$$

a_x e a_y si ottengono dai prodotti scalari $\vec{a}\cdot\hat{\imath}$ e $\vec{a}\cdot\hat{\jmath}$, e sarà lo stesso per le componenti $a_{x'}$ e $a_{y'}$ nella rappresentazione nel sistema x'-y'.

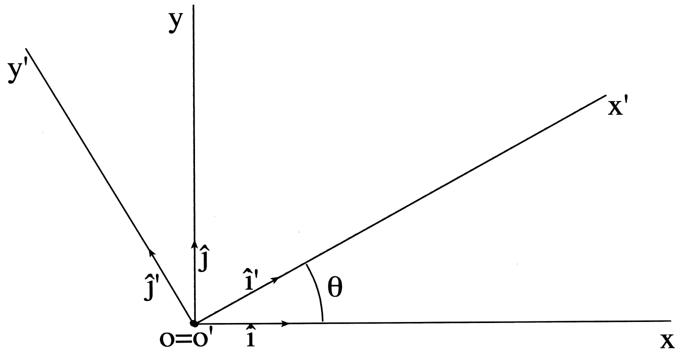

Figura 18: **rotazione degli assi**

Allora, basterà moltiplicare scalarmente l'equazione precedente, rispettivamente per $\hat{\imath}\,'$ e $\hat{\jmath}\,'$, per ottenere le espressioni di $a_{x'}$ e $a_{y'}$:

$$\begin{aligned} a_{x'} = \hat{\imath}\,'\cdot \vec{a} = a_x\, \hat{\imath}\,'\cdot \hat{\imath} + a_y\, \hat{\imath}\,'\cdot \hat{\jmath} \;&=\; a_x\, \cos\theta + a_y\, \sin\theta \\ a_{y'} = \hat{\jmath}\,'\cdot \vec{a} = a_x\, \hat{\jmath}\,'\cdot \hat{\imath} + a_y\, \hat{\jmath}\,'\cdot \hat{\jmath} \;&=\; -\,a_x\, \sin\theta + a_y\, \cos\theta \end{aligned}$$

avendo sempre espresso, nelle ultime relazioni, gli angoli tra i versori in termini del solo angolo θ.

Si può utilizzare il formalismo delle matrici e del prodotto righe per colonne per scrivere queste equazioni di trasformazione delle componenti in forma più compatta, ed anche più facile da ricordare:

$$\begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\imath}\,'\cdot \hat{\imath} & \hat{\imath}\,'\cdot \hat{\jmath} \\ \hat{\jmath}\,'\cdot \hat{\imath} & \hat{\jmath}\,'\cdot \hat{\jmath} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Analogamente si possono ottenere le equazioni di trasformazione inverse, da $a_{x'}$ e $a_{y'}$ a a_x e a_y. Si noti che la trasformazione che lega le a_x, a_y alle $a_{x'}$, $a_{y'}$ è una trasformazione lineare che non dipende da $\vec{a}$, ma solo dal parametro θ che individua la rotazione che porta x-y su x'-y', per cui tutti gli spostamenti si trasformano allo stesso modo per rotazione degli assi di un angolo θ, e così anche le coordinate di un qualunque punto.

È ovvio dalla definizione intrinseca di prodotto scalare ed è facile da verificare direttamente dalle formule di trasformazione, che, per ogni coppia di spostamenti $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il numero $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (quindi in particolare $|\vec{a}|$ e $|\vec{b}|$) **non cambiano** per rotazione degli assi cartesiani. Infatti:

$$a_x\, b_x + a_y\, b_y = a_{x'}\, b_{x'} + a_{y'}\, b_{y'}$$

(nel calcolo dell'espressione del prodotto scalare in coordinate cartesiane non si faceva riferimento a nessuno specifico sistema di assi ortogonali.)

Un altro tipo di cambiamento di assi ortogonali si ottiene con la trasformazione di inversione di uno degli assi, ad esempio $x\,,\, y \longrightarrow x,\, -y$, trasformazione che non si può ottenere per rotazione.

Ancora, il prodotto scalare assumerà lo stesso valore nei due sistemi di assi. L'inversione infatti, cambiando i segni delle seconde componenti di entrambi i vettori, ne lascia invariato il prodotto. Ci si convince subito che ogni sistema di assi cartesiani ortogonali nel piano, x', y', si può ricavare da x, y, aventi la stessa origine, per rotazione seguita eventualmente da un'inversione di assi (basterà sovrapporre x a x' con una rotazione, y coinciderà allora con y' o con $-y'$). Dunque, per qualunque cambiamento di assi cartesiani ortogonali piani (rotazioni

+ inversioni) il prodotto scalare di due spostamenti qualunque (in particolare la lunghezza di qualunque spostamento) rimane invariato.

Il numero $\vec{a} \cdot \vec{b}$ non gode di questa proprietà di invarianza per il solo fatto di essere un numero. Anche la prima componente di un qualunque spostamento $\vec{a}$ è un numero, ma varia per cambiamento di assi cartesiani ortogonali.

5.2 Nello spazio

Con qualche complicazione in più dovuta al fatto che una rotazione non è più definita da un solo angolo, si ripetono le considerazioni fatte nel caso piano. Però, le equazioni di trasformazione, per rotazione degli assi, delle componenti di un qualunque spostamento nello spazio si ottengono in maniera analoga, e qui vogliamo solo accennare al fatto che possono essere scritte in forma compatta mediante una matrice 3×3 (intuitiva generalizzazione del caso piano):

$$\begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\imath}'\cdot\hat{\imath} & \hat{\imath}'\cdot\hat{\jmath} & \hat{\imath}'\cdot\hat{k} \\ \hat{\jmath}'\cdot\hat{\imath} & \hat{\jmath}'\cdot\hat{\jmath} & \hat{\jmath}'\cdot\hat{k} \\ \hat{k}'\cdot\hat{\imath} & \hat{k}'\cdot\hat{\jmath} & \hat{k}'\cdot\hat{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Le inversioni di asse danno luogo a trasformazioni particolarmente semplici: quelle componenti dello spostamento $\vec{a}$, relative agli assi invertiti, cambiano segno; ma rimane invariato il prodotto scalare di due spostamenti e la lunghezza di uno spostamento.

Il prodotto scalare tra due spostamenti (e il modulo di uno spostamento) è **invariante** per qualunque cambiamento di assi cartesiani ortogonali con la stessa origine (rotazioni degli assi + inversioni).

6 Grandezze e spazi vettoriali in Fisica. Altre operazioni

Abbiamo definito l'insieme degli spostamenti, le operazioni algebriche sugli spostamenti e come essi si trasformano per cambiamento di assi cartesiani di riferimento.

Come abbiamo già osservato, questo insieme astratto sembra modellare perfettamente la struttura dello spazio fisico. In particolare lo utilizzeremo nell'immediato futuro per descrivere la "scena" in cui avviene il moto dei corpi.

Sperimentalmente si verifica che varie grandezze fisiche sono ben rappresentate da strutture identiche a quella introdotta per gli spostamenti: queste grandezze richiederanno lo stesso insieme di numeri per essere specificate, avranno le stesse regole di somma, e le loro componenti cartesiane si trasformeranno nello stesso modo per rotazione degli assi cartesiani ortogonali di riferimento.

I valori possibili di queste grandezze saranno, come gli spostamenti, ben rappresentati da elementi di un insieme che chiamiamo "**spazio vettoriale euclideo a due o tre dimensioni**", pur non avendo niente a che fare con spostamenti, posizioni spaziali e neppure lunghezze.

Ogni elemento di questo insieme verrà da ora definito generalmente come **vettore**. La radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti cartesiane ortogonali di un vettore (la lunghezza nel caso degli spostamenti) sarà detto **modulo** del vettore.

Si dirà **grandezza vettoriale** ogni grandezza fisica che abbia le proprietà, verificate sperimentalmente, di un vettore: in particolare quelle di trasformazione per rotazione e inversione degli assi.

Ogni grandezza fisica che, come il prodotto scalare tra due spostamenti, è definita da un numero che non varia per rotazione e inversione degli assi del sistema cartesiano ortogonale di riferimento, si dice **grandezza scalare** (come notato precedentemente non è sufficiente che una grandezza sia espressa attraverso un numero perché sia una grandezza scalare).

6.1 Altre operazioni sullo spazio dei Vettori

Prodotto vettoriale: dati due vettori qualsiasi e non nulli $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (vedi la figura 19), si definisce loro prodotto vettoriale, e lo indicheremo $\vec{a} \times \vec{b}$ o anche $\vec{a} \wedge \vec{b}$, il vettore che ha direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$, modulo dato da:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta \qquad \text{(con } \theta = \text{l'angolo tra } \vec{a} \text{ e } \vec{b} \text{ minore o uguale a } \pi\text{)}$$

[Nota: sono dunque 2 gli angoli, θ e $\pi - \theta$, che hanno lo stesso seno]

e verso uguale a quello in cui avanzerebbe un cavatappi (o una vite destrorsa, cioè la maggior parte delle viti), immaginando di ruotare $\vec{a}$ verso $\vec{b}$ (in altre parole $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$ devono formare una terna destrorsa) [questa è detta "**regola del cavatappi**"].

Si noti che la definizione di prodotto vettoriale è intrinsecamente tridimensionale e non è estendibile a una e due dimensioni.

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono due spostamenti, $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ è l'area del parallelogramma individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Infatti, "$|\vec{a}|\,\sin\theta$" e "$|\vec{b}|\,\sin\theta$" rappresentano le due altezze del parallelogramma.

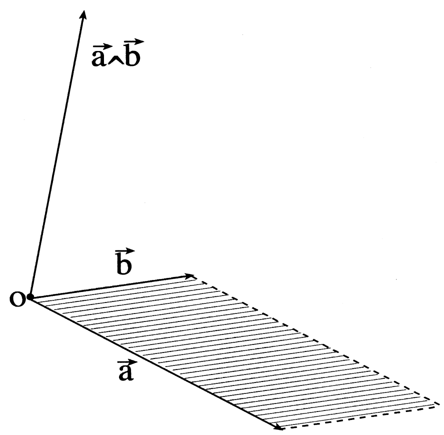

Figura 19: **prodotto vettoriale di due vettori**

Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (non nulli) hanno necessariamente la stessa direzione (paralleli o antiparalleli). Esiste dunque un λ, numero reale, tale che $\vec{a} = \lambda\,\vec{b}$ con λ positivo o negativo a seconda che $\vec{a}$ e $\vec{b}$ siano paralleli o antiparalleli.

Dalla definizione si vede facilmente che:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a} \qquad \textbf{(anticommutatività del prodotto vettoriale)}$$

e che

$$(\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \forall\,\lambda \in \mathbf{R}\ .$$

Si dimostra che vale la **proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma**:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

(per la dimostrazione si possono vedere i problemi 25 e 26, pagg. 22 e 23, del capitolo 2 di Spiegel, *Analisi vettoriale*, su questa stessa pagina-web).

Inoltre, se $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ sono i versori degli assi di una terna cartesiana destrorsa si hanno le seguenti relazioni, molto importanti nelle applicazioni:

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \times \hat{\jmath} &= -\,\hat{\jmath} \times \hat{\imath} \;=\; \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} &= -\,\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} &= -\,\hat{\imath} \times \hat{k} \;=\; \hat{\jmath} \end{aligned}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

Questa tabella dei prodotti vettoriali dei versori e l'uso della distributività del prodotto vettoriale rispetto alla somma permettono di calcolare facilmente le componenti (cartesiane) ortogonali del vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ in termini delle componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}) \times (b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath} + b_z\,\hat{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{k} \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}\,)_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ (\vec{a} \times \vec{b}\,)_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ (\vec{a} \times \vec{b}\,)_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned}$$

(si faccia attenzione all'ordine nella componente sull'asse y !).

Utilizzando la notazione matriciale, le relazioni precedenti possono essere scritte in forma compatta come sviluppo del determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \quad .$$

<u>NOTA</u> - Come abbiamo sottolineato nella definizione di vettore, la natura vettoriale di una quantità deve essere verificata (non semplicemente asserita come abbiamo fatto per $\vec{a}\times\vec{b}$). La nostra definizione individua $\vec{a}\times\vec{b}$ con un modulo, una direzione ed un verso come accade per un vettore, ma implica anche una maniera specifica di cambiamento di coordinate per trasformazione ortogonale di assi (rotazione + inversione), che non abbiamo ancora verificato essere quella caratteristica di un vettore.

Per rotazione della terna cartesiana di riferimento, $\vec{a} \times \vec{b}$ cambia necessariamente come $\vec{a}$ e $\vec{b}$, quindi come un vettore (questo può comunque essere verificato direttamente dalle trasformazioni per le componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$).

Per inversione totale degli assi $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ (la terna diventa sinistrorsa) si ha:

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,)_x = a_y b_z - a_z b_y = (-a_{y'})(-b_{z'}) - (-a_{z'})(-b_{y'}) = (\vec{a} \times \vec{b}\,)_{x'}$$

*e analogamente per le altre componenti. Le componenti del prodotto vettoriale tra due vettori, in seguito ad inversione spaziale degli assi cartesiani, <u>non</u> cambiano, diversamente da come si trasforma un vettore. Ogni quantità che, come il prodotto vettoriale tra due vettori, possiede tutte le caratteristiche di un vettore per rotazione della terna di riferimento, ma non cambia segno per inversione totale degli assi, si dirà **grandezza pseudovettoriale**.*

Si definisce **triplo prodotto scalare** (alcuni autori lo chiamano "doppio prodotto misto", invero più chiaro) di tre vettori non nulli $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ il numero $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. L'espressione del triplo prodotto scalare in termini delle componenti cartesiane ortogonali dei tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ deriva direttamente da quella del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b})_x c_x + (\vec{a} \times \vec{b})_y c_y + (\vec{a} \times \vec{b})_z c_z = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\, c_x + (a_z b_x - a_x b_z)\, c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, c_z\end{aligned}$$

che in forma compatta e comoda da ricordare si può scrivere:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det \begin{pmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} .$$

Innanzi tutto, osserviamo che le parentesi, nella scrittura del triplo prodotto scalare, non sono necessarie, perché non c'è ambiguità, ma non è male usarle.

Nel caso in cui i tre vettori siano segmenti nello spazio, il valore assoluto del triplo prodotto $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ è uguale al volume del parallelepipedo costruito sui segmenti $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$:

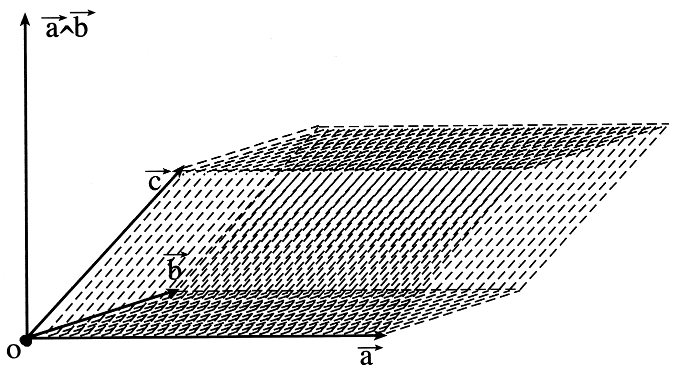

Figura 20: **volume del parallelepipedo**

In particolare il triplo prodotto è nullo se e solo se i tre segmenti sono complanari.

Dal disegno in figura o dalle proprietà del determinante, o da un calcolo diretto in componenti cartesiane, si deduce facilmente che scambiando ciclicamente i tre vettori il triplo prodotto scalare non cambia; se lo scambio non è ciclico esso cambia di segno:

$$\begin{aligned}&(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &\qquad = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

Si definisce **triplo prodotto vettoriale** (o anche "doppio prodotto vettoriale") di tre vettori non nulli $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ il vettore $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. In questo caso le parentesi sono necessarie, perché, come si capisce immediatamente, il vettore $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ è diverso dal vettore $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$!

Nella rappresentazione cartesiana si possono dimostrare le importanti identità vettoriali:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c} \,,$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$$

che saranno molto utili (per la dimostrazione si può vedere il problema 47, pagg. 28 e 29, del capitolo 2 di Spiegel, *Analisi vettoriale*).

6.2 Momento di un vettore

Introduciamo ora un vettore che si ottiene eseguendo un particolare prodotto vettoriale e che rappresenterà diverse grandezze fisiche di cui ci occuperemo estesamente.

Consideriamo un vettore $\overrightarrow{A}$ applicato in un generico punto P dello spazio e sia $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ il vettore posizione del punto P rispetto ad un qualunque punto O (vedi la figura 21).

Definiamo il prodotto vettoriale:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{A} \equiv \overrightarrow{M}_O^{(A)}$$

"**momento del vettore** $\overrightarrow{A}$ rispetto al punto O ". In generale, se cambiamo punto O, il momento cambierà: il momento del vettore $\overrightarrow{A}$ rispetto al punto O' è diverso da quello rispetto al punto O. Il momento è un vettore perpendicolare al piano individuato dal vettore $\overrightarrow{A}$ e dal punto O ed è entrante o uscente dal piano in accordo con la regola del cavatappi (nel caso in figura è entrante). Il momento non è applicato ad alcun punto, è un vettore libero.

Chiameremo **polo** il punto dello spazio rispetto al quale è calcolato il momento. La retta che passa per il punto di applicazione P del vettore $\overrightarrow{A}$ e che ha la direzione del vettore $\overrightarrow{A}$ (unica) verrà chiamata **retta di applicazione** del vettore $\overrightarrow{A}$.

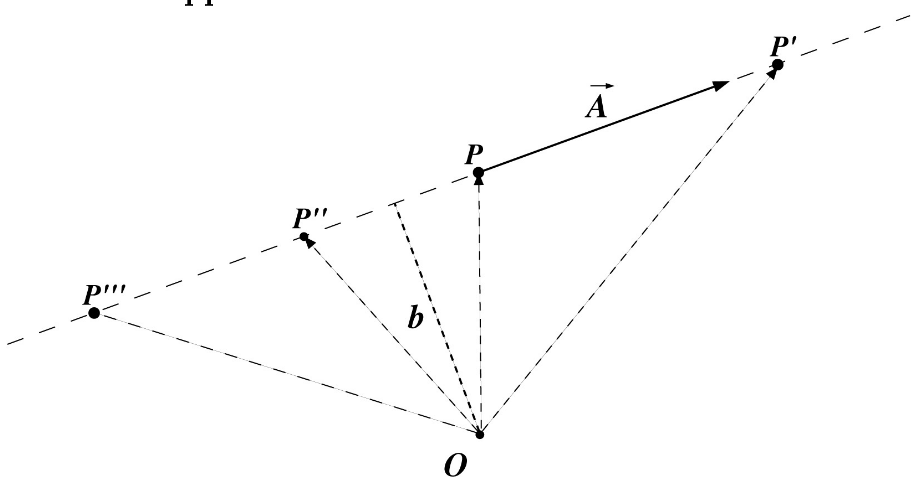

Figura 21: **momento e braccio di un vettore**

Si dimostra facilmente (utilizzando la figura) che se spostiamo il vettore $\overrightarrow{A}$ lungo la retta di applicazione, se lo consideriamo, cioè, applicato via via in punti diversi $P, P', P'', P''', \ldots$ appartenenti alla retta di applicazione, il momento rispetto ad un polo O non cambia, in quanto il modulo del momento è sempre dato dalla stessa quantità:

$$\left|\overrightarrow{M}_O^{(A)}\right| = b \left|\overrightarrow{A}\right|$$

essendo b la "distanza" del punto O dalla retta (uno scalare positivo, calcolato lungo la perpendicolare da O alla retta di applicazione); b sarà detto **braccio** del vettore $\overrightarrow{A}$ rispetto al polo O.

Se consideriamo un certo numero, n, di vettori $\overrightarrow{A}_i$ (con $i = 1, 2, \ldots, n$), applicati a punti diversi P_i, si dirà **momento risultante** dell'insieme di vettori $\overrightarrow{A}_i$, rispetto ad un polo O, il vettore:

$$\overrightarrow{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} \times \overrightarrow{A}_i$$

Sarà utile, e importante, la relazione che lega il momento risultante, dell'insieme dei vettori $\overrightarrow{A}_i$, rispetto al polo O a quello calcolato rispetto ad un polo diverso O'. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \ \overrightarrow{O'P_i} \times \overrightarrow{A}_i \ &= \ \sum_{i=1}^{n} \ \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}\right) \times \overrightarrow{A}_i = \\
&= \ \sum_{i=1}^{n} \ \overrightarrow{O'O} \times \overrightarrow{A}_i + \sum_{i=1}^{n} \ \overrightarrow{OP_i} \times \overrightarrow{A}_i = \\
&= \ \overrightarrow{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \ \overrightarrow{A}_i \ + \ \overrightarrow{M}_O = \\
&= \ \overrightarrow{O'O} \times \overrightarrow{A}^{\,(\mathrm{ris})} \ + \ \overrightarrow{M}_O
\end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio il vettore $\overrightarrow{A}^{\,(\mathrm{ris})}$ si deve intendere il "risultante" (cioè la somma vettoriale) dei vettori $\overrightarrow{A}_i$, applicato al punto O. Se il vettore risultante di un insieme di vettori è nullo, il momento risultante di essi, che in generale non è nullo, non dipende però dal polo rispetto al quale è calcolato (vedi un'importante applicazione di questo risultato nel paragrafo 7.2).

7 Un altro vettore nello spazio fisico: la forza

Qui non vogliamo entrare nel merito del concetto di forza, che è un concetto assai delicato, al quale nel corso di Meccanica verrà dedicato un grande spazio e un trattamento approfondito. Quella che segue è una breve introduzione ad alcuni esercizi che riteniamo utili in quanto palestra per le operazioni di calcolo vettoriale che poi ci accompagneranno in tutto il corso. Attenzione, dunque, a non considerarla come una comoda semplificazione di quello che verrà studiato, più avanti, in Dinamica.

Ci limitiamo, allora, a utilizzare la conoscenza scolastica e la nozione intuitiva di forza. Questa nozione intuitiva è quella di "spinta" o "azione" di un corpo su di un altro, e in maniera naturale siamo portati ad attribuirle una intensità, una direzione ed un verso. Ci convinceremo che effettivamente la forza si comporta esattamente come un vettore nel senso più profondo che abbiamo introdotto nelle precedenti due sezioni: cioè le sue proprietà di trasformazione per cambiamento del sistema di riferimento cartesiano sono quelle del vettore.

Più precisamente questo vettore rappresenta un'azione ed è applicato..: ad un corpo puntiforme, oppure è applicato a elementi infinitesimi di massa, appartenenti a porzioni di un corpo esteso (ad es. una superficie esterna) o appartenenti all'intero corpo. Oppure, come vedremo più avanti nel corso, si tratta di un vettore definito in ogni punto dello spazio, indipendentemente dalla presenza di un corpo materiale, è una Funzione vettoriale che chiameremo **Campo di forze**. Quanto alle dimensioni, la forza ha dimensioni: $[F] = [m][l][t]^{-2}$; e la sua unità di misura nel **SI** è il *newton*: $1\,N = 1\,kg\,m/s^2$.

In Meccanica si studiano forze macroscopiche che agiscono su corpi macroscopici; queste possono essere messe in relazione con due delle Interazioni fondamentali della materia, l'interazione gravitazionale e l'interazione elettromagnetica.

La Forza Gravitazionale rientra tra le interazioni fondamentali; essa nello schema della "Meccanica classica" è una forza macroscopica ed "opera a distanza"; più propriamente sarà rappresentata da un Campo di forze. Tutte le altre forze macroscopiche della Meccanica sono forze "di contatto", insorgono cioè a causa del contatto di un corpo con un altro (o anche di un corpo con un fluido), e sono riconducibili in ultima analisi all'interazione elettromagnetica.

Il termine "**interazione**" è quello più appropriato per parlare di forze, perché si tratta sempre di azioni reciproche per ogni coppia di corpi che prendiamo in esame. Questo fatto verrà asserito in un principio, che chiameremo "Principio di Azione e Reazione": se un corpo A esercita una forza (AZIONE) su un corpo B, allora B esercita su A una forza uguale e contraria (REAZIONE, rappresentata da un vettore uguale ed opposto al primo). In realtà, le nozioni di Azione e Reazione sono speculari e possono essere scambiate tra loro: non si può dire quale sia l'azione e quale la reazione.

Attenzione: Per ogni corpo che ci troveremo a considerare, dovremo chiederci quale sia l'altro corpo con cui "scambia" ognuna delle forze che identifichiamo come agenti su quel corpo. Ripetiamo, la ricerca andrà eseguita per ognuna delle forze!

Un altro principio che discende dai Principi della Meccanica e qui abbiamo bisogno di anticipare, è il "Principio dell'Equilibrio" per i corpi puntiformi: affinché un corpo puntiforme inizialmente fermo rimanga fermo, occorre che le forze agenti su di esso siano in "equilibrio", che si compensino tra loro, abbiano cioè somma vettoriale nulla. Abbiamo già precisato che i corpi puntiformi sono corpi osservati da distanze tali da non poterne apprezzare le dimensioni e le deformazioni, ma consideriamo altresì puntiformi anche quei corpi che solo per comodità disegniamo come estesi, ma non possono essere soggetti ad eventuali moti di rotazione.

Allora, dobbiamo innanzi tutto imparare a riconoscere le forze che agiscono su un corpo (su ciascun corpo). Questa sezione è concepita per introdurre alcune delle forze macroscopiche della Meccanica senza una definizione accurata, che verrà data più avanti nel corso, ma solo attraverso degli esempi. Le forze sono: la forza Peso, la Reazione vincolare Normale, la forza di Attrito radente Statico, la Tensione di un filo, e la forza (Elastica) di una molla ideale.

La **Forza Peso**, per ora, sarà semplicemente quella forza che ogni corpo "scambia" con la terra (cioè la forza gravitazionale; ma si tratta di una approssimazione, come vedremo). Essa è data da:

$$m_i\,\vec{g} \qquad\qquad \text{(con } m_i \text{ massa del corpo } i\text{-esimo e } \vec{g} \text{ accelerazione di gravità)}$$

e comparirà solo una volta e su ciascun corpo, perché la sua opposta agisce **sulla terra**! Il vettore $\vec{g}$ ha la direzione della verticale, il verso in giù e il modulo uguale a $g = 9.81\,m/s^2$ (con piccole variazioni da luogo a luogo).

Quanto ai corpi in contatto, essi, a due a due, si "scambiano" sempre una coppia o, a volte, due coppie di forze. La prima coppia di forze riguarda quelle che chiamiamo **Reazioni vincolari Normali**: sussistono se e solo se i corpi sono in contatto e "premono" l'uno verso l'altro, e quindi stanno a schematizzare quelle forze microscopiche (molecolari) che impediscono la penetrazione dei corpi; esse sono sempre **perpendicolari** alle superfici di contatto nel punto o punti di contatto, il verso è quello che impedisce la penetrazione e il modulo è una **incognita**, perché dipende dalla pressione di cui abbiamo detto prima.

Esse sono denotate in generale:

$$\overrightarrow{N}\,, \quad \text{e} \quad -\overrightarrow{N} \quad \text{la sua controparte ;}$$

con eventuali indici, a seconda dei corpi in gioco. Il modulo $\left|\overrightarrow{N}\right|$ dovrà essere determinato.

Le seconde due forze sono **tangenti** alle superfici di contatto, sono dette **Forze di Attrito radente Statico** e sussistono se le superfici **non** sono **lisce** e impediscono quindi lo scivolamento dell'una sull'altra. Queste forze sono **incognite**: la loro direzione e il loro verso non sono noti a priori e vanno determinati, così come il loro modulo è una **incognita**; questo però non può essere arbitrariamente grande, oltre una certa soglia i corpi si mettono in movimento. Negli esempi di cui ci occuperemo, ammetteremo che i corpi **siano fermi** e, quando le superfici non sono lisce e presentano dunque attrito radente, avremo da determinare la loro direzione e quel valore incognito della loro componente tangenziale. Le Forze di Attrito radente Statico sono denotate in generale:

$$\vec{f}_a\,, \quad \text{e} \quad -\vec{f}_a \;\; \text{la sua controparte} \; .$$

Un corpo, inoltre, può essere attaccato ad un filo e ci interessa la situazione in cui il filo è **teso**: in questo caso esiste una forza lungo il filo e tra gli elementi del filo che si chiama, appunto, **Tensione**. L'altra estremità del filo è attaccata o in contatto con un altro corpo. Un filo può essere considerato il tramite di coppie di forze opposte che si esercitano tra le sue porzioni elementari fino ad arrivare a due forze che si esercitano, alle estremità di ogni tratto rettilineo, sui due corpi. Nel nostro corso, questo filo verrà sempre considerato inestensibile e di massa trascurabile: in questo caso viene detto "**filo ideale**". Si vedrà che per un filo ideale la tensione che si trasmette all'interno del filo ha modulo che non varia lungo il filo, e quindi alle due estremità avremo due **tensioni** con queste proprietà: ciascuna punta dal lato del filo ("tira il corpo"), entrambe hanno la direzione individuata dal filo e hanno modulo uguale, questo modulo è una **incognita** (anche qui inferiore ad una certa soglia, che è la tensione di rottura). Le Tensioni alle estremità di un tratto rettilineo (libero) del filo sono denotate in generale:

$$\vec{\tau}\,, \quad \text{e} \quad -\vec{\tau} \;\; \text{la sua controparte} \; ;$$

con eventuali indici per ogni tratto di filo. Le tensioni e le reazioni vincolari normali possono annullarsi per un istante e poi tornare ad essere non nulle, ma NON possono cambiare verso, non funzionano cioè come impedimento allo spostamento del corpo in entrambi i versi: un corpo si può staccare dall'altro corpo e un filo si può "allentare" e non esercitare più alcuna forza sul corpo. Si tratta di vincoli monodirezionali.

Anche la molla, di cui ci occuperemo in tutto il resto del corso, non è come le molle che conosciamo nella vita reale; come il filo, essa ha una massa trascurabile e le forze che esercita sui due corpi che sono attaccati alle sue estremità sono uguali ed opposte e hanno la direzione dell'asse della molla. Esse si chiamano **Forze Elastiche**. Questa molla viene detta "**molla ideale**". A differenza del filo, però, funziona in entrambi i sensi, sia in allungamento che in compressione, e il modulo della Forza Elastica non è incognito ma è **proporzionale alla deformazione** della molla rispetto alla sua lunghezza di riposo. Maggiori spiegazioni verranno date a lezione.

Passiamo ora a presentare alcuni esempi di equilibrio per corpi puntiformi. In questi esempi c'è un disegno che rappresenta uno o più corpi macroscopici in interazione, e tutti interagenti con la terra (!). Nella discussione che verrà fatta in classe si chiarirà bene quali sono dei blocchetti praticamente puntiformi, che solo per evidenza vengono disegnati come quadrati o rettangoli, e quali sono dei corpi estesi di cui è in evidenza solo una superficie o tutte le superfici esterne (come nel caso dei cunei triangolari), e non sono soggetti a moti di rotazione. Per ognuno dei corpi andranno individuate tutte le forze che agiscono su quel corpo, e per ognuna delle forze andrà disegnata sul proprio quaderno una freccia che la rappresenti correttamente, con accanto il suo **"nome"** (lettera con freccia, es. $\vec{N}$). Questo diagramma andrà ripetuto per ognuno dei corpi, eventualmente disegnati separatamente se questo può rendere più chiaro il disegno, ma a partire dal secondo corpo (vedi Esercizio n. 3) le forze opposte (perché controparte di una forza di interazione) avranno vettore **opposto** indicato con **−"nome"** (es. $-\vec{N}$).

Questo diagramma prende il nome di “**diagramma delle forze di corpo singolo**” (o anche “di corpo libero”).

Questi esempi verranno introdotti e commentati in classe; poi verranno assegnati come Esercizi: per individuare le forze agenti, per disegnare i diagrammi delle forze; per introdurre opportuni sistemi di assi cartesiani ortogonali e per considerare su di essi le componenti ortogonali delle singole forze, in modo da ottenere dei sistemi algebrici (di primo grado) nei valori incogniti del modulo delle forze di cui abbiamo detto.

7.1 Esercizi di equilibrio di corpi puntiformi

Allora, per ogni esercizio bisogna disegnare su ciascun corpo il diagramma delle forze, individuando e nominando ciascuna forza. Bisogna scrivere poi l'equazione vettoriale del bilancio delle forze, cioè che la somma vettoriale di esse sia nulla. Avendo introdotto un opportuno sistema di riferimento cartesiano, bisogna proiettare le equazioni vettoriali sugli assi e risolvere il sistema algebrico per ottenere i valori incogniti.

Esercizio n. 1

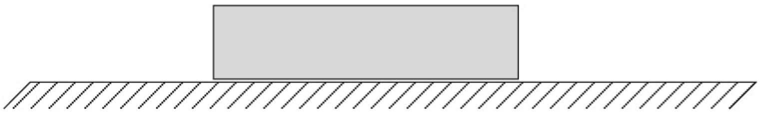

Figura 22: **Blocco fermo su piano orizzontale**

Esercizio n. 2

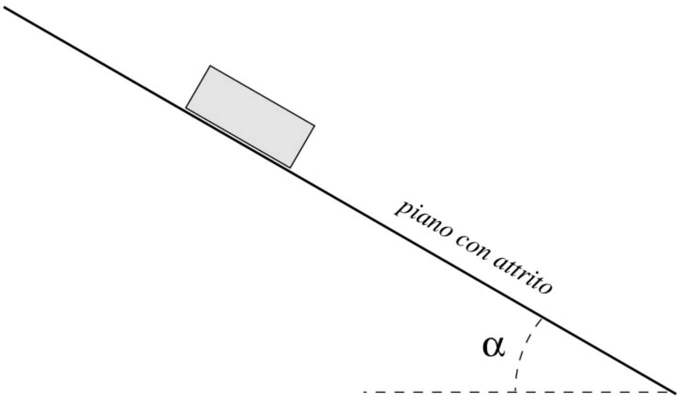

Figura 23: **Blocco fermo su piano inclinato con attrito**

Corpi in interazione

Esercizio n. 3

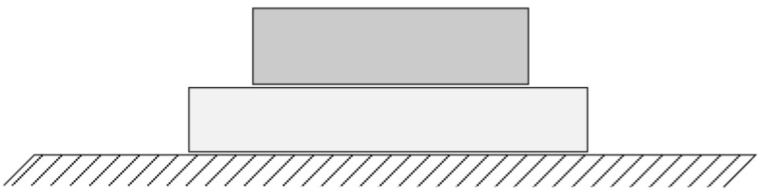

Figura 24: **Due blocchi uno sull'altro, fermi, su piano orizzontale**

I due esercizi che seguono si distinguono per il fatto che, nel **n. 4**, sono le superfici di contatto tra i due corpi (di pesi $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$) a presentare attrito, mentre il piano d'appoggio è liscio: dunque non c'è una forza orizzontale da parte del piano di appoggio ad assicurare l'equilibrio del cuneo. Nell'esercizio **n. 5**, invece, le superfici di contatto non presentano attrito e se non fosse che per le forze esterne ai due corpi non potrebbe esserci equilibrio.

Bisogna trovare tutte le espressioni delle forze e verificare l'effettivo equilibrio.

Esercizio n. 4

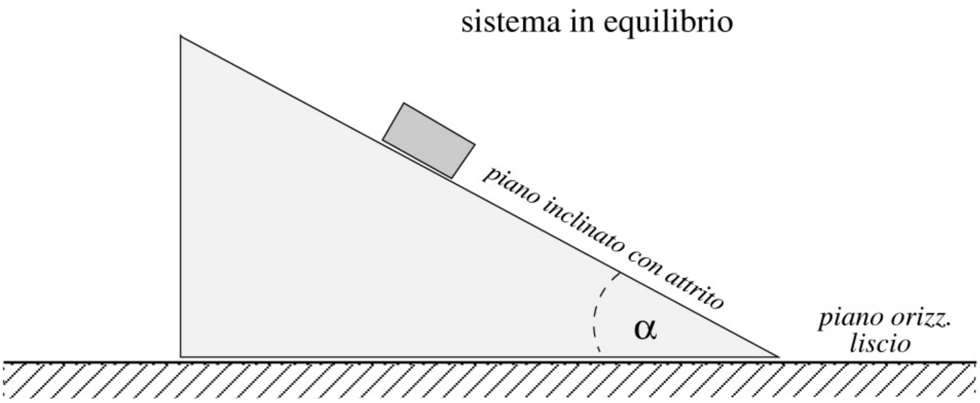

Figura 25: **Blocco fermo su cuneo con attrito, a sua volta poggiato su piano orizzontale privo di attrito**

Esercizio n. 5

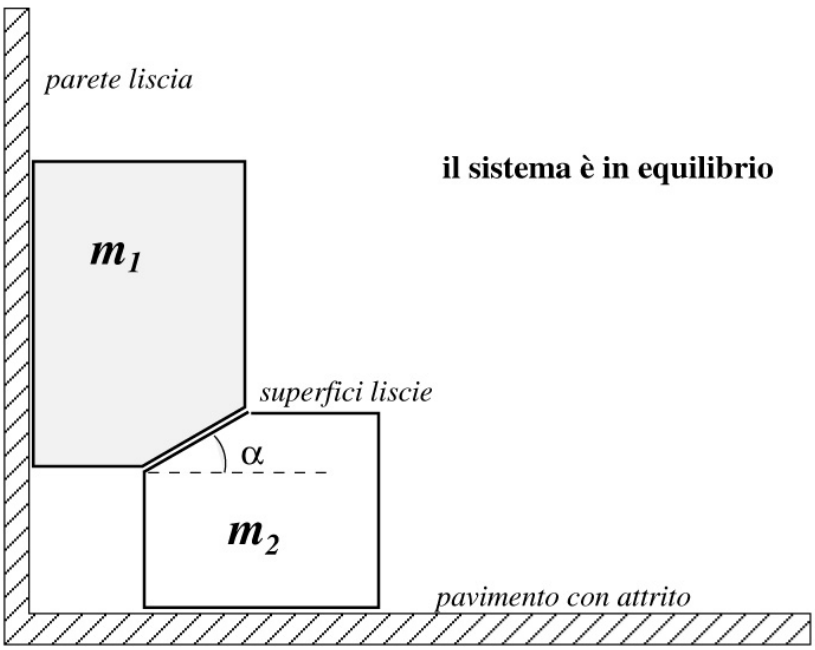

Figura 26: **Blocchi fermi in contatto mediante superficie inclinata liscia, e poggiati su piano orizzontale con attrito**

Qui di seguito altri esercizi, con carrucole ideali, fili e molle ideali. Si chiama "**carrucola ideale**" una carrucola con massa e raggio trascurabili: essa ha la proprietà che le due tensioni applicate nei due punti dove il filo si distacca dalla carrucola hanno lo stesso modulo (sia all'equilibrio, come in questi casi, sia con il filo in movimento).

Esercizio n. 6

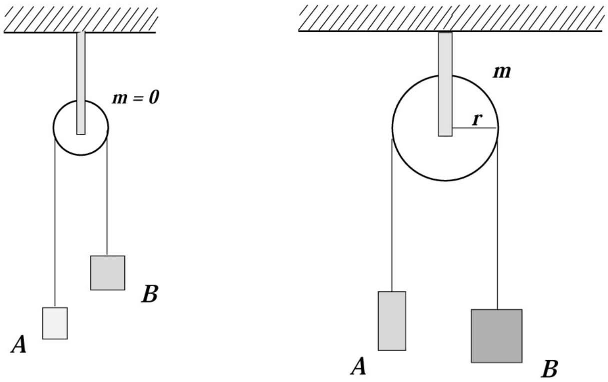

Figura 27: **Carrucole in equilibrio: ci interessa solo il primo caso nell'approssimazione di massa trascurabile**

Esercizio n. 7

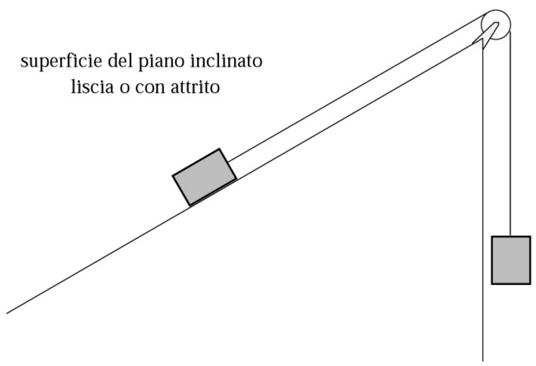

Figura 28: **Piano inclinato senza e con attrito; carrucola e filo ideali**

Esercizio n. 8

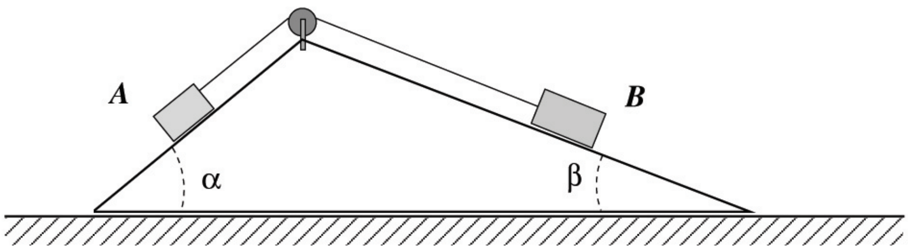

Figura 29: **Doppio piano inclinato senza attrito con due blocchi, poggiato su un piano orizzontale liscio: 3 corpi, dunque (carrucola e filo ideali).**

Esercizio n. 9

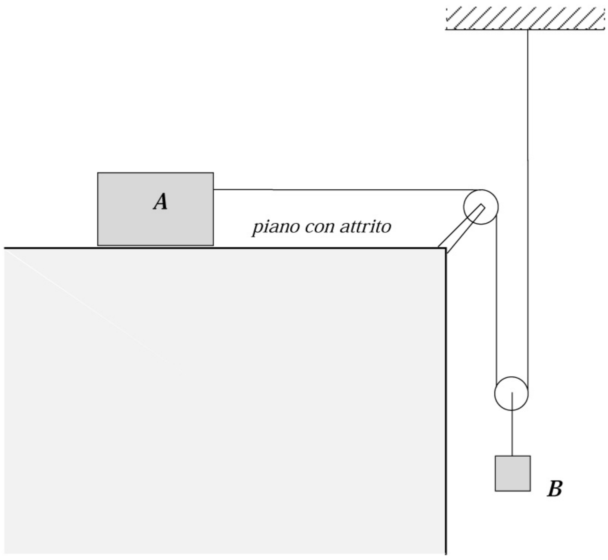

Figura 30: **Piano orizzontale con attrito; carrucole (di cui una mobile) e filo ideali**

Esercizio n. 10

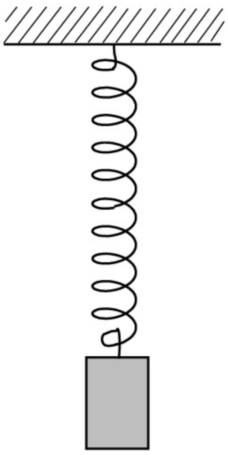

Figura 31: **Molla ideale in verticale con corpo attaccato ad una estremità**

7.2 Esercizi di equilibrio di corpi estesi rigidi

Nel corso di Meccanica ci occuperemo di corpi estesi "**rigidi**", per i quali cioè non cambiano nel tempo le distanze tra i punti interni. In particolare, avremo sempre a che fare con corpi rigidi "**omogenei**", nei quali la distribuzione della massa è uniforme.

Delle forze che abbiamo introdotto in precedenza, la forza peso è applicata ai singoli elementini di massa dell'intero corpo, la reazione vincolare normale e la forza di attrito statico sono distribuite sull'intera superficie di contatto; solo la tensione del filo e la forza elastica sono applicate ad un solo elementino (punto) del corpo.

Per un corpo rigido omogeneo, quel particolare punto geometrico che viene detto "**Centro di Massa**" (la cui definizione, come vedremo nella seconda parte del corso, sarà data per qualunque sistema di punti e di corpi) si trova semplicemente nel centro geometrico del volume occupato dal corpo omogeneo. Si dimostrerà che a questo punto si può considerare applicato, a tutti gli effetti, il vettore risultante delle forze peso elementari.

Se i corpi rigidi possono essere soggetti a moti di rotazione, allora deve essere enunciato un "Principio dell'Equilibrio" più generale: affinché un corpo rigido inizialmente fermo rimanga fermo, occorre **a)** che la risultante delle forze agenti su di esso sia nulla e **b)** che sia nullo il momento risultante di tutte le forze, rispetto a qualunque polo. Per quanto visto nel paragrafo 6.1.2, in seguito ad **a)** il momento risultante non dipende dal particolare polo prescelto (e quindi si effettuerà la scelta nel modo più conveniente).

Negli esercizi che seguono, per i corpi puntiformi si procederà come nel paragrafo precedente, mentre per i corpi estesi (rigidi e omogenei, di massa M) le forze andranno proiettate su due assi cartesiani, introdotti opportunamente nel piano del foglio, e i momenti andranno proiettati sul terzo asse della terna, ortogonale al foglio.

Esercizio n. 11

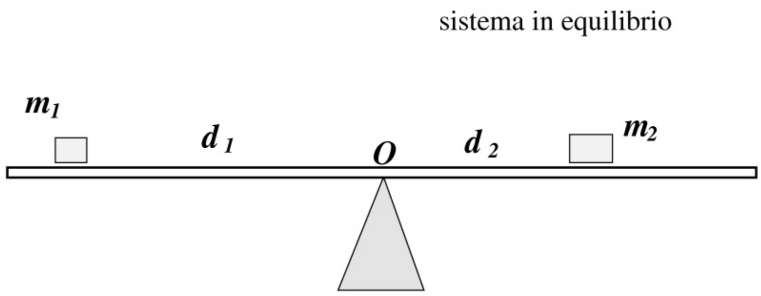

Figura 32: **Altalena con due blocchi in equilibrio**

Esercizio n. 12

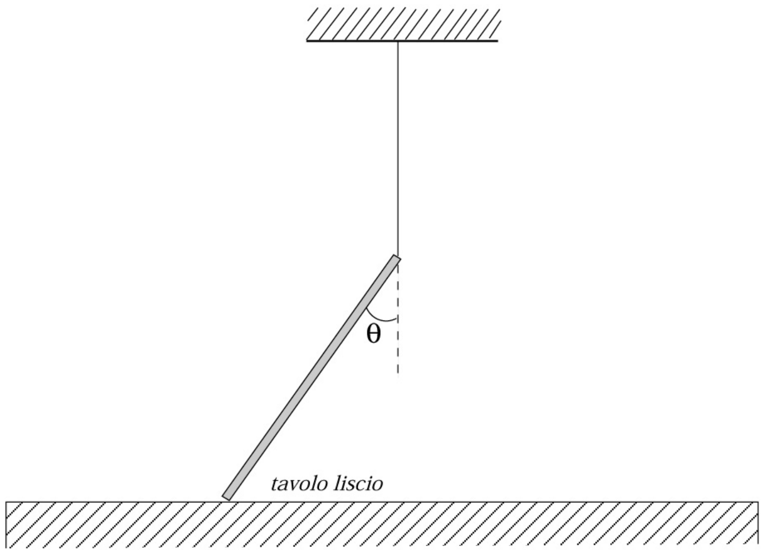

Figura 33: **Asticella poggiata su piano orizzontale liscio e retta da un filo attaccato all'estremità superiore**

Esercizio n. 13

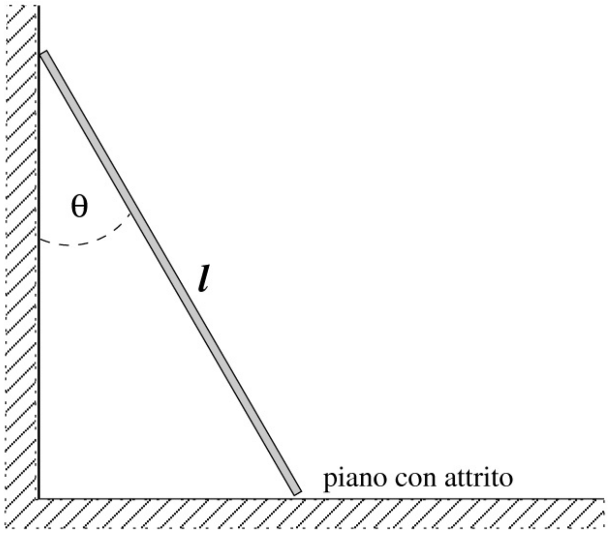

Figura 34: **Asta appoggiata ad una parete verticale liscia e su un piano orizzontale con attrito**

Esercizio n. 14

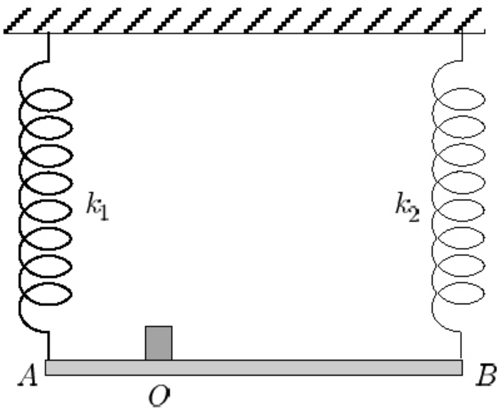

Figura 35: **Sbarra in equilibrio in posizione orizzontale con 2 molle (ideali) diverse e corpo appoggiato**