Considerazioni su alcuni esercizi

Vorrei tentare di mettermi nei vostri panni e allo stesso tempo fare la parte di uno "studente che sta imparando la lezione"...

Cominciamo con il famigerato Esercizio 1.8 di pag.3 (blocco C), che già ha dato filo da torcere ad alcuni di voi.

Devo decidere quale sistema di riferimento adottare. Scelgo certamente un sistema fisso, per prima cosa, e in questo caso la figura ne suggerisce uno. Direi che può andare bene (l'asse x è verso destra e l'asse z è condotto per il punto O). Poi, devo essere pronto a considerare un sistema mobile, solidale con il piano inclinato e asse x' parallelo al profilo del piano (come abbiamo sempre fatto; quanto all'origine e il verso, per ora non me ne preoccupo). O.K. Vediamo un po', non mi vengono chiesti tempi, ma velocità, posizioni e costante k: non ci sarà bisogno, insomma, di affrontare la risoluzione delle equazioni del moto, si tratta di un sistema a due corpi, uno però non è puntiforme e, soprattutto, il sistema non è isolato; la molla spinge in basso e verso destra il piano inclinato, con una forza che varia nel tempo, dunque la **reazione vincolare** del piano orizzontale sul piano inclinato è... un brutto affare! Però: le forze **esterne** al sistema dei due corpi sono entrambe **verticali**. Abbiamo dunque una conservazione della quantità di moto totale e/o del moto del centro di massa del sistema lungo la direzione x!

E poi, non ci sono attriti e quindi c'è conservazione dell'energia meccanica totale. Bene. Vediamo meglio, sembra che ci siano varie incognite. Quali sono gli istanti che considero rilevanti (non che li debba individuare)? L'istante iniziale e quello (sia t_1) in cui la pallina sarà in A (e l'ascissa di A sarà $\bar{x}$), e poi quello in cui la pallina arriva sul piano orizzontale, in x^*, dopo la sua brava parabola. All'istante iniziale tutto è fermo: quantità di moto totale nulla, centro di massa del sistema fermo. All'istante t_1 tutto si muove: il piano inclinato **verso destra** (oramai questo è diventato addirittura intuitivo, no?) con una velocità $\vec{V}$ orizzontale, la pallina verso sinistra con una velocità $\vec{v}$ (assoluta); eh sì, ma con quale angolo? L'angolo α (dato dal testo) è l'angolo della velocità **relativa** $\vec{v}_r$, non di quella assoluta! L'angolo, α', della velocità $\vec{v}$ è sicuramente maggiore, basta fare il disegno della composizione vettoriale

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_r \ .$$

O.K., ho capito che devo mettere in gioco anche la relazione di sopra della composizione delle velocità, che proietterò sugli assi $x - z$, mentre indicherò con v_r la componente della velocità relativa sull'asse x'. Non ha importanza la posizione dell'origine di questo asse, perché mi serve solo indicare la componente della velocità relativa, quanto al verso, posso prendere quello verso l'alto. Vediamo il bilancio equazioni-incognite: l'equazione vettoriale di sopra dà due equazioni per le componenti con 4 incognite (perché l'angolo α, che serve per proiettare $\vec{v}_r$ su $x - z$, è noto). Me ne servono altre 2. Vediamo: c'è la conservazione della componente x della quantità di moto totale, come preannunciato; e poi, non è certo la conservazione dell'energia che ci interessa, perché introdurrebbe un'altra incognita, k; e quindi, è il moto della pallina nel vuoto che ci serve, con la relazione tra velocità (assoluta) iniziale (al tempo t_1) e ascissa del punto d'impatto, questa è la seconda relazione. Evviva, credo che sia fatta! E allora l'equazione di conservazione dell'energia meccanica totale serve a trovare k.

A questo punto, credo (spero) di essermi chiarite abbastanza le idee e posso procedere a scrivere qualcosa, cioè a risolvere l'esercizio. Ho da trovare innanzi tutto $\bar{x}$ (no, non me l'ero dimenticato). Credo proprio che l'equazione che esprime la **conservazione dell'ascissa del centro di massa** del sistema, all'istante $t = 0$ e all'istante t_1, sia una equazione in una sola incognita.

Preferisco buttar giù, per prima cosa, le relazioni trigonometriche per il triangolo rettangolo AOB:

$$OB = \frac{h}{\tan\alpha} \qquad AB = \frac{h}{\sin\alpha} \qquad \ell_0 = \frac{h}{2\sin\alpha}$$

(α e h sono noti nel nostro problema) e devo ricordarmi che il centro di massa di un triangolo rettangolo è ad 1/3 dei cateti, dalla parte dell'angolo retto. Bene, avendo convenientemente definito $\gamma = \frac{m}{M}$, devo esprimere, nel sistema di riferimento scelto, $x_C(0) = x_C(t_1)$:

$$\frac{1}{m_{tot}}\left(M\frac{1}{3}OB + M\gamma\frac{3}{4}OB\right) = \frac{1}{m_{tot}}\left[M\left(\bar{x} + \frac{1}{3}OB\right) + M\gamma\bar{x}\right] \ .$$

L'unica incognita è effettivamente $\bar{x}$; ottengo

$$\bar{x} = \frac{3\gamma h}{4\tan\alpha(1+\gamma)} \ .$$

Sostituisco i valori numerici ed ottengo 4.13 centimetri, si trova! Sono rincuorato, e sono contento di aver ottenuto l'equazione in funzione di γ, h e α generici.

Sono pronto ad affrontare le 4 equazioni di cui ho parlato prima. Non nascondo che sono troppo tentato di trovare l'angolo α', sebbene potrei lasciare le equazioni con le componenti cartesiane come incognite. Riuscirò ad esprimere α' in funzione di α, in maniera semplice? Non ne ho alcuna idea, ma, ripeto, la tentazione è troppo forte. Ci si deve pur "divertire" (se si ha tempo), e poi sarebbe una relazione da utilizzare in altre occasioni (ottima motivazione). Scrivo innanzi tutto le relazioni cartesiane della composizione delle velocità:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_r \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} v_x = V - v_r\cos\alpha \\ v_z = v_r\sin\alpha \end{cases} \ ;$$

e poi la conservazione della componente x della quantità di moto totale:

$$Q_x = 0 = MV + \gamma M v_x \qquad \Rightarrow \quad V + \gamma v_x = 0$$

cioè

$$V = -\gamma v_x \ .$$

Allora inserisco quest'ultima nell'espressione della v_x di sopra:

$$v_x = -\gamma v_x - v_r \cos\alpha \ ,$$

cioè

$$v_x = \frac{-v_r \cos\alpha}{1+\gamma} \ ;$$

e dunque ottengo

$$\tan\alpha' = \frac{|v_z|}{|v_x|} = (1+\gamma) \tan\alpha \ .$$

Molto bene. Con i nostri valori l'angolo (espresso in gradi) passa da 36° a 38.6°. A questo punto, a partire dalle equazioni del moto del grave, scrivo l'equazione dell'ordinata (nulla) del punto di impatto della pallina, in funzione della gittata d, della tangente dell'angolo della velocità iniziale e della sua componente x:

$$h + \tan\alpha' d - \frac{1}{2}\, g\, \frac{d^2}{v_x^2} = 0 \ .$$

La gittata è $d = \bar{x} - x^*$ e dunque

$$v_x = -d\sqrt{\frac{g}{2(h + d\tan\alpha')}} \ ;$$

da cui

$$V = -\gamma v_x \qquad\qquad |\vec{v}| = |v_x|\sqrt{1 + \tan^2\alpha'} \ .$$

Queste sono le velocità richieste! Per ricavare la costante elastica della molla k, scrivo l'equazione di conservazione dell'energia meccanica totale (che discende da quello che io chiamo teorema delle forze vive generalizzato, o applicato al **sistema dei due corpi**):

$$E(t=0) = \frac{1}{2}\, k\, \frac{\ell_0^2}{4} + \gamma M g \frac{h}{4} = E(t_1) = \gamma M g h + \frac{1}{2}\, M\, V^2 + \frac{1}{2}\, \gamma M\, v^2 \ ,$$

da cui

$$k = \frac{2M}{\ell_0^2}\left[3\gamma g h + 2\left(V^2 + \gamma v^2\right)\right] \ .$$

Bene, forse abbiamo imparato qualcosa.

In questo caso non era conveniente applicare il Teorema di König, ma vale la pena ricordare che nel caso di soli due corpi esso assume una forma, che è utile in molti casi. E questa forma usualmente non si trova sui libri. Dobbiamo ricordare le **fondamentali** relazioni inverse di quelle che definiscono la velocità del centro di massa e la velocità relativa:

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_{tot}} \\ \vec{v}_{2-1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_C - \frac{m_2}{m_{tot}}\vec{v}_{2-1} \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_C + \frac{m_1}{m_{tot}}\vec{v}_{2-1} \end{cases} \ .$$

E da queste seconde, sostituendole nell'espressione dell'energia cinetica totale dei due corpi, $K_{tot} = \frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_2^2$, si ricava facilmente:

$$K_{tot} = K_C + K_\mu = \frac{1}{2}\, m_{tot} v_C^2 + \frac{1}{2}\, \mu\, v_{2-1}^2 \ ,$$

dove μ è la massa ridotta. Per confronto con la forma usuale del teorema di König, qui otteniamo che l'energia cinetica totale del moto "intorno" al centro di massa (cioè calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa) si può esprimere come l'energia cinetica di una particella **virtuale** di massa μ con la velocità del corpo 2 calcolata relativamente al corpo 1.

Negli esercizi come il 2.1 e il 2.2, bisognerà sfruttare il fatto che il corpo rigido è il più semplice che si possa immaginare per poter calcolare con facilità il momento angolare e il momento d'inerzia. Nel caso dell'esercizio 2.1, il sistema è isolato e quindi ne deduco senz'altro che il moto deve essere di roto-traslazione **uniforme**. Il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme ed un sistema di riferimento ad esso solidale, con origine nel centro di massa ed assi paralleli e concordi con gli assi fissi, vede il corpo ruotare intorno all'asse, perpendicolare e passante per il centro di massa, con velocità angolare ω costante.

Nel sistema di riferimento fisso, un corpo rigido che si muove di moto rotatorio intorno ad un asse che trasla perpendicolarmente (cioè che si mantiene fisso come direzione, ma che trasla con velocità sempre perpendicolare a sé stesso) si muove anche, istante per istante, di moto puramente rotatorio intorno ad un asse di rotazione che è istantaneamente fermo. Ci si convince di questo fatto abbastanza facilmente, dopo averci ragionato su per bene. Perché questa considerazione è importante? Perché ci si convince anche che la velocità angolare è necessariamente la stessa, sia che la si calcoli nel sistema fisso, nel moto di pura rotazione intorno all'asse istantaneo, sia che la si calcoli nel sistema di riferimento mobile, che trasla solidalmente con l'asse vero. Nel caso dell'esercizio 2.1 si può controllare agevolmente questa proprietà. Il centro di massa nell'istante iniziale si trova, ovviamente, nel punto di ascissa $\frac{\ell}{3}$ mentre il punto per il quale, in quell'istante, passa l'asse istantaneo di rotazione è quello di ascissa $\frac{2\ell}{3}$, questo punto infatti è fermo istantaneamente! E la velocità angolare risulta

$$\omega = \frac{3 v_1}{2\ell} \ .$$

Questo stesso valore si ottiene spostandosi nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa, che si muove con velocità costante, parallela e concorde con l'asse y, uguale a $\frac{v_1}{2}$. In questo sistema di riferimento $v_1' = \frac{1}{2}\, v_1$ e $v_2' = -v_1$.

Se calcoliamo il momento angolare, rispetto a C, otteniamo un vettore perpendicolare al piano, **entrante**, di modulo:

$$\left|\vec{L}_C\right| = \frac{\ell m_1 v_1}{2} \ ;$$

il momento d'inerzia è presto calcolato rispetto all'asse c :

$$I_c = \frac{m_1 \ell^2}{3} \ .$$

Dividendo, riotteniamo il valore di ω.

Se il momento angolare risulta costante (rispetto al tempo) come conseguenza dell'annullarsi del momento risultante delle forze (esterne) agenti sul corpo, risulterà necessariamente costante la velocità angolare, e quindi il moto di rotazione intorno al centro di massa sarà uniforme e la legge oraria per l'angolo φ:

$$\varphi(t) = -\frac{3v_1}{2\ell}\, t \ ,$$

e all'istante τ sarà $\varphi(\tau) = -\pi$. Da cui, facilmente, i risultati dell'esercizio 2.1.

Questo esercizio ci permette di verificare un risultato generale, esprimibile in questo modo sintetico:

$$\vec{L}_C = \vec{L}'_C \ .$$

Nel primo caso il momento angolare è calcolato nel sistema di riferimento fisso, mentre nel secondo caso è calcolato nel sistema solidale con il centro di massa (con le velocità relative dunque). Avendo a che fare con sistemi di corpi puntiformi, l'equazione è significativa e si dimostra facilmente. Nel caso di un corpo rigido, e volendo utilizzare la velocità angolare, la si può utilizzare quasi come una definizione, in connessione con il teorema, analogo a quello di König, molto importante, che afferma che:

$$\vec{L}_O = \vec{OC} \times m_{tot}\, \vec{v}_C + \vec{L}_C \ .$$

Quest'ultima relazione ha una immediata interpretazione nei moti roto-traslatori, si ricorda con facilità in accoppiata con il teorema di König ed è molto utile nella pratica.