UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Corso di Laurea in FISICA

Esercitazioni
di
MECCANICA e TERMODINAMICA

Anno Accademico 2017–2018

UNITÀ **A**

Vettori e Cinematica del corpo puntiforme

[a cura di Alberto Clarizia]

1 Vettori

1.1 Vettori, spostamenti ed Equilibrio delle forze

Esercizio 1.1 Durante una partita di calcio, il portiere P rilancia la palla dal centro della propria linea di porta al terzino T, il quale si trova ad una distanza $l = 30\,m$ dalla sua linea di fondo e ad una distanza di $s = 20\,m$ a sinistra dalla linea PC congiungente i centri delle due porte. Il terzino poi passa la palla all'attaccante A che si trova ad una distanza $h = 80\,m$ dalla linea di fondo e $d = 15\,m$ a destra dalla linea PC.

1) Quale direzione e verso deve imprimere alla palla l'attaccante per centrare la porta avversaria (farla giungere cioè nel punto centrale C della linea di porta) se il campo di calcio ha lunghezza $L = 100\,m$?

2) Si calcolino gli spostamenti (vettori) parziali, lo spostamento complessivo compiuto dalla palla da P a C e quanta distanza ha percorso la palla dal punto iniziale a quello finale?

Esercizio 1.2 Quali tra i seguenti vettori sono mutuamente perpendicolari? Le terne di numeri indicano le componenti cartesiane ortogonali del vettore (x, y e z nell'ordine):

$$\vec{a} = (2,\,1,\,1)\,; \quad \vec{b} = (0,\,0,\,2)\,; \quad \vec{c} = (1,\,-2,\,0)\,; \quad \vec{d} = (1,\,1,\,-3)\,; \quad \vec{e} = (9,\,5,\,3)\,.$$

Esercizio 1.3 Dati i cinque vettori dell'esercizio **1.2**, determinare i <u>vettori</u> componenti (ortogonali) di $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ed $\vec{e}$ nella direzione parallela ad $\vec{a}$.

Esercizio 1.4 Il vettore $\vec{C}$ somma di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ha modulo $|\vec{C}| = 10\,u$ e forma un angolo $\alpha = 60°$ con $\vec{A}$, il cui modulo è $|\vec{A}| = 12\,u$. Trovare il modulo di $\vec{B}$ e l'angolo θ compreso tra $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Esercizio 1.5 La figura 1 seguente rappresenta gli spostamenti successivi di un aereo che sta volando seguendo una rotta di ricerca in un piano a quota fissata. La posizione iniziale dell'aereo è A, le posizioni intermedie B e C, e la posizione finale è D. Gli assi del sistema di riferimento sono: (Sud $\rightarrow$ Nord) $\equiv$ **y**) e (Ovest $\rightarrow$ Est) $\equiv$ **x**). Lo spostamento $\overrightarrow{AB}$ ha modulo $|\overrightarrow{AB}| = 18.0\,km$; lo spostamento $\overrightarrow{BC}$ ha modulo $|\overrightarrow{BC}| = 9.5\,km$ e lo spostamento $\overrightarrow{CD}$ ha modulo $|\overrightarrow{CD}| = 12.0\,km$.

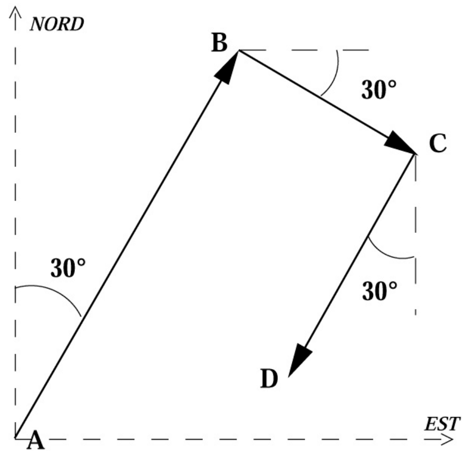

Figura 1: relativa all'esercizio **1.5**

Qual è lo spostamento risultante (modulo e orientamento) tra A e D? Si trovi la risposta sia graficamente (eseguendo accuratamente un disegno della grandezza di una pagina con un goniometro e una riga graduata e misurando lunghezza ed orientamento dello spostamento risultante) sia trigonometricamente (risolvendo triangoli).

Esercizio 1.6 Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, di moduli $|\vec{A}| = 8\,u$ e $|\vec{B}| = 10\,u$, che formano un angolo $\theta = 60°$, determinare il modulo $|\vec{D}|$ del vettore $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ e l'angolo β formato da questo con $\vec{A}$.

Esercizio 1.7 A quale dei cinque vettori dell'esercizio **1.2** è parallelo il vettore $\vec{f} = (-2,\,-2,\,6)$? Che relazione esiste tra le componenti di due o più vettori paralleli?

Esercizio 1.8 Dimostrare che i seguenti vettori:

$$\vec{A} = 2\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k} \qquad \vec{B} = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - \hat{k} \qquad \vec{C} = -3\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 2\,\hat{k}$$

formano i lati di un triangolo.

Esercizio 1.9 Dati due vettori $\vec{d_1}$ e $\vec{d_2}$ rappresentanti le diagonali di un parallelogramma, costruire il parallelogramma, utilizzando il calcolo vettoriale: trovare cioè i due vettori rappresentanti i due lati del parallelogramma.

Esercizio 1.10 Dimostrare, utilizzando il calcolo vettoriale, che la linea congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato ed è la metà del medesimo.

Esercizio 1.11 I vettori posizione dei punti P e Q, rispetto ad un'origine O, siano dati da $\vec{p}$ e $\vec{q}$ rispettivamente. Se R è un punto che divide il segmento PQ in due segmenti le cui lunghezze si trovano nel rapporto $\overline{PR}\,/\,\overline{RQ} = n/m$, dimostrare che il vettore posizione di R è dato da:

$$\vec{r} = \frac{m\,\vec{p} + n\,\vec{q}}{m+n}$$

e che esso è indipendente dall'origine.

Esercizio 1.12 Per verificare la regola del parallelogramma per la composizione delle forze (vettori), ci si serve dell'apparecchio mostrato schematicamente nella figura 2 seguente. Due fili flessibili e inestensibili, di peso trascurabile, passano su due carrucole **A** e **B** e recano da un lato, rispettivamente, i pesi $\vec{p_1}$ e $\vec{p_2}$ e dall'altro sono annodati in un punto P, cui è fissato un terzo peso $\vec{p_3}$. In caso di equilibrio si può considerare che i fili nel punto P esercitino delle forze di moduli esattamente uguali a quelli dei tre pesi, rispettivamente, e con le appropriate direzioni e versi.

Se $|\vec{p_1}| = 30\,g(peso)$ e $|\vec{p_2}| = 50\,g(peso)$, quale valore dovrà avere $|\vec{p_3}|$ affinché, a equilibrio raggiunto, l'angolo fra i due fili in P risulti di $60°$? Quali saranno allora gli angoli α e β tra i fili e la verticale?

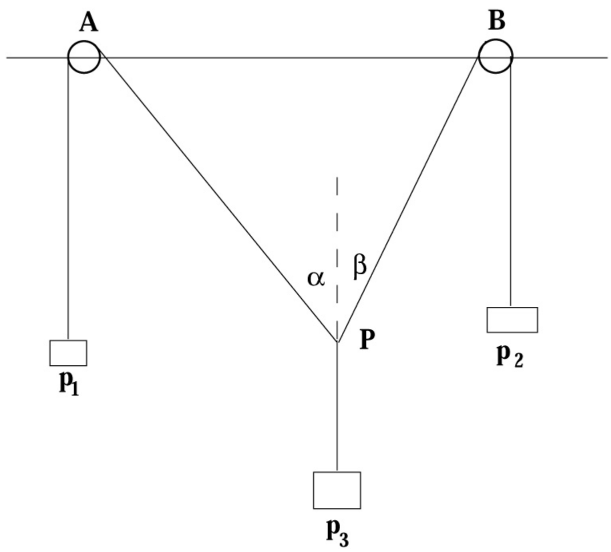

Figura 2: relativa all'esercizio **1.12**

Esercizio 1.13 Determinare la forma generale di un vettore perpendicolare ai seguenti due vettori:

$$\vec{A} = 3\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\,\hat{k} \qquad \vec{B} = 2\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - \hat{k}.$$

Esercizio 1.14 Dimostrare, utilizzando il calcolo vettoriale, che un angolo inscritto in una semicirconferenza è un angolo retto.

Esercizio 1.15 Individuato un piano mediante i tre punti (1, 2, 2), (2, 0, −2) e (3, 1, 1), determinare il vettore unitario $\hat{n}$ perpendicolare a questo piano. È unico?

Esercizio 1.16 Dati i due vettori $\vec{A} = (2,\,1,\,1)\,m$ e $\vec{B} = (1,\,0,\,-3)\,m$ (qui "m" sta per metri), **(a)** determinare il seno dell'angolo compreso tra essi. **(b)** Qual è l'area del triangolo formato da questi due vettori e dal segmento che congiunge i loro vertici? **(c)** E qual è l'angolo compreso tra essi?

Esercizio 1.17 Tre forze complanari applicate in un punto hanno intensità di $4\,N$(*Newton*), $5\,N$ e $6\,N$ rispettivamente; se il punto è in equilibrio, quali sono gli angoli fra le tre forze (calcolare a meno di un decimo di grado).

Esercizio 1.18 Si dimostri geometricamente che, se gli assi cartesiani ortogonali $x' - y'$ sono ruotati di un angolo θ rispetto agli assi $x - y$, le componenti cartesiane di un qualsiasi vettore $\vec{a}$ nei due sistemi di coordinate sono legate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= \quad a_x\,\cos\theta + a_y\,\sin\theta \\ a_{y'} &= -a_x\,\sin\theta + a_y\,\cos\theta \end{aligned}$$

1.2 Equilibrio dei momenti delle forze

Esercizio 1.19 Una forza data da $\vec{F} = 3\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k}$ viene applicata al punto P di coordinate $(1, -1, 2)$. Trovare il momento di $\vec{F}$ rispetto al punto C di coordinate $(2, -1, 3)$.

Esercizio 1.20 Una trave, di massa M e lunghezza l, è appoggiata ad una parete (con attrito trascurabile) e su un pavimento che presenta attrito. L'angolo tra la parete e la trave è θ. Sulla trave è appoggiato un blocco (che si può considerare puntiforme) di massa m; tra il blocco e la superficie della trave c'è attrito (vedi la figura 3). Il sistema è in equilibrio. Trovare tutte le forze incognite e trovare la posizione del blocco sulla trave, sapendo che la forza di attrito tra l'estremità inferiore della trave e il pavimento ha modulo $|\vec{f}_{a2}|$.

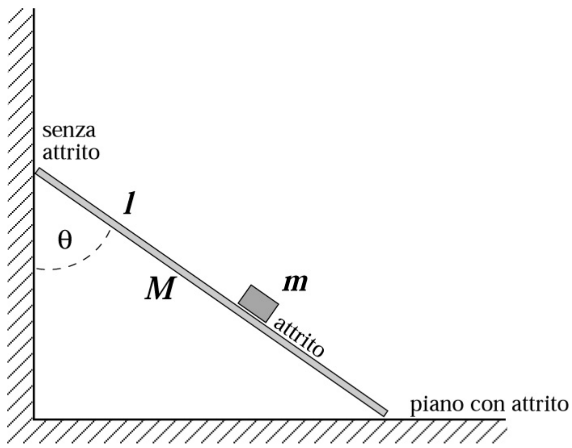

Figura 3: relativa all'esercizio **1.20**

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 3.5\,kg$; $l = 2.4\,m$; $\theta = 55°$; $m = 1.6\,kg$; $|\vec{f}_{a2}| = 32\,N$.

Esercizio 1.21 Una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m è appoggiata ad una calotta semisferica, di massa M e raggio r, e con un estremo sulla superficie di un piano orizzontale (vedi figura 4). Quest'ultima presenta attrito sia al contatto con l'estremità della sbarretta sia al contatto con la base della calotta, mentre la superficie superiore della calotta è liscia. La distanza tra il punto A di appoggio della sbarretta e il bordo della calotta è $d = 2/3\, r$. Il sistema è in equilibrio.

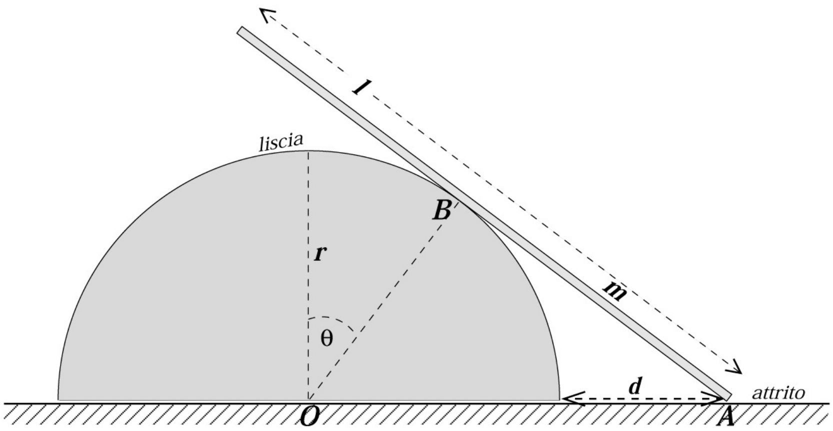

Figura 4: relativa all'esercizio **1.21**

Trovare le espressioni di tutte le grandezze incognite, nonché i valori numerici nel caso proposto nell'applicazione numerica.

APPLICAZIONE NUMERICA: $l = 80\, cm$; $r = 30\, cm$; $m = 0.45\, kg$; $M = 1.2\, kg$.

Esercizio 1.22 [da Landau, *Meccanica*] Due aste di egual lunghezza l sono appoggiate su di un piano orizzontale liscio. Esse sono congiunte alle estremità in alto mediante un perno e sono collegate in basso da un cavo ideale AB: la loro larghezza può essere trascurata, ma è sufficiente a garantirne l'equilibrio (vedi la figura 5, che rappresenta una sezione verticale; l'angolo di base è α). Il perno ha massa trascurabile e non presenta attrito, fa sì dunque che il punto C sia sede di due reazioni vincolari, eguali ed opposte, di cui è incognito modulo e direzione. In un punto a distanza x dalla estremità A è agganciato all'asta un corpo di massa M. Si determinino tutte le reazioni vincolari agenti sulle aste, $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, $\vec{\tau}$ e $\vec{R}_C$ (e $-\vec{R}_C$), nell'approssimazione in cui siano trascurabili le masse delle aste rispetto ad M.

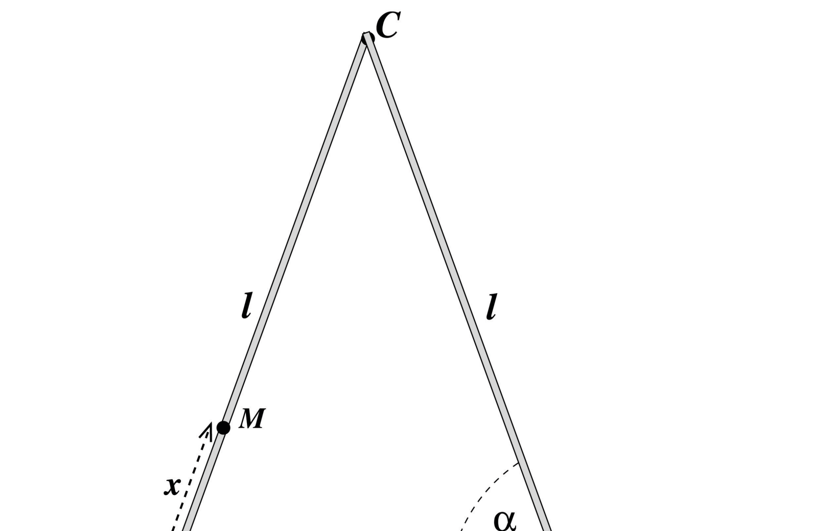

Figura 5: relativa all'esercizio **1.22**, lo "scaletto"

APPLICAZIONE NUMERICA: $l = 1.80\, m$; $\alpha = 64°$; $x = 0.45\, m$; $M = 60\, kg$.

Esercizio 1.23 [da Landau, *Meccanica*] Un'asta omogenea di massa m è appoggiata con una estremità nel punto B di un piano orizzontale e con l'altra ad un punto A di un piano verticale (vedi la figura 6), ed è tenuta in questa posizione da due cavi ideali **orizzontali** AD e BC, fissati alle estremità dell'asta e ai due punti D e C (con dei perni); il cavo BC si trova nel piano verticale passante per l'asta AB e questo piano forma un angolo β con il piano verticale contenente il punto D; l'asta forma un angolo α con il cavo BC. Gli attriti tra le estremità dell'asta ed i piani di appoggio sono trascurabili. Determinare tutte le forze agenti sull'asta.

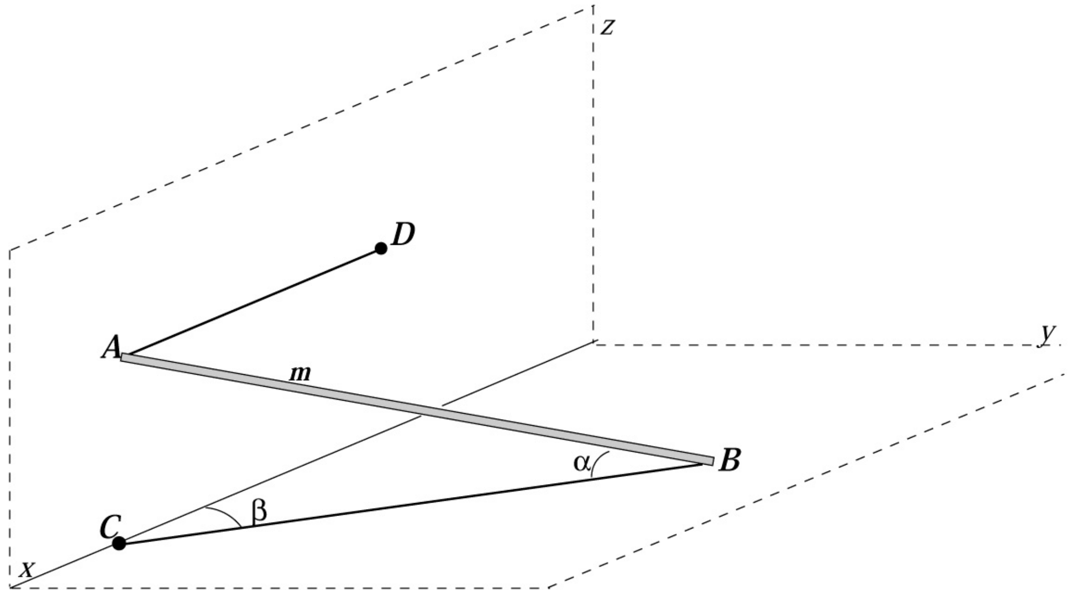

Figura 6: relativa all'esercizio **1.23**

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 1.6\,kg$; $\alpha = 30°$; $\beta = 40°$.

2 Moti descritti da una coordinata

2.1 Esercizi introduttivi

Esercizio 2.1 Un'automobile percorre un rettilineo a velocità costante. All'istante iniziale viene osservato il transito per il punto dove inizia il rettilineo ($x_0 = 0$, dove iniziano i cosiddetti "segnali di progressiva chilometrica", che hanno sostituito sulle strade italiane le vecchie pietre miliari).

a) Se dopo un minuto viene osservato il passaggio al chilometro $x_1 = 1.2\,km$, in quale istante t_2 l'auto transiterà per il chilometro $x_2 = 13.5\,km$?

b) Con quale velocità l'auto dovrebbe percorrere il rettilineo se dovesse transitare nello stesso punto x_2 un minuto e un quarto prima del tempo t_2? Quanti chilometri in più, rispetto al primo caso, percorrerebbe dopo 1 ora?

Esercizio 2.2 Due automobili A e B percorrono lo stesso rettilineo nei due modi seguenti:
A al tempo $t = 0.0\,h$ è nella posizione $s = 2.4\,km$ e si sta muovendo con una velocità costante $v_A = 40\,km/h$.
B al tempo $t = 0.5\,h$ è nella posizione $s = 0.0\,km$ e si sta muovendo nello stesso verso di A con una velocità costante $v_B = 70\,km/h$.

C'è un sorpasso? In caso affermativo, chi sorpassa chi? In quale posizione avviene il sorpasso? A quale tempo?

Risolvere il problema in due modi diversi:
- *graficamente*, riportando le due leggi orarie sullo stesso grafico;
- *algebricamente*, risolvendo il sistema di due equazioni lineari in due incognite.

Esercizio 2.3 Il grafico mostrato nella figura 7 illustra come varia nel tempo la posizione di due carrelli A e B che si muovono su due binari rettilinei paralleli (su di essi è stato introdotto un sistema di coordinate s con le due origini sulla stessa perpendicolare ai due binari).

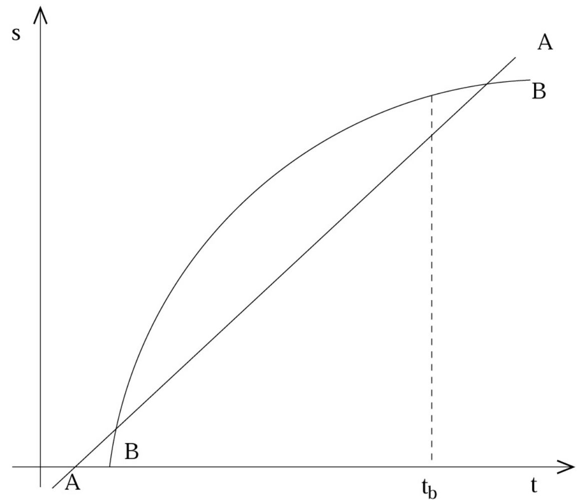

Figura 7: relativa all'esercizio **2.3**

a) Indica sull'asse dei tempi, col simbolo t_S, l'istante o gli istanti in cui un carrello sorpassa l'altro.

b) Quale carrello, A o B, si muove più velocemente al tempo t_b?

c) Indica sull'asse dei tempi, col simbolo t_V, l'istante o gli istanti in cui i due carrelli hanno la stessa velocità.

d) Nell'intervallo di tempo riportato in figura la velocità del carrello B sta
- aumentando sempre
- diminuendo sempre
- aumentando per parte del tempo e diminuendo per parte del tempo

(Indica la risposta considerata corretta e danne una breve spiegazione).

Esercizio 2.4 Un autovelox registra il passaggio di un'auto A con una velocità $v_A = 126\, km/h$ e dopo 10 secondi il passaggio di un'auto B con una velocità $v_B = 144\, km/h$. Le due auto proseguono entrambe con velocità costante.

Dopo quanti secondi dal passaggio davanti all'autovelox l'auto B raggiungerà l'auto A? Quanti metri dovrà percorrere per raggiungerla?

2.2 Esercizi con maggiore formalizzazione

Esercizio 2.5 Le posizioni di due punti materiali P_1 e P_2 (l'unità di misura sull'asse x è il *metro* e sull'asse dei tempi è il *secondo*) sono date da:

$$x_1(t) = (5 + 3t + 2t^2) \qquad x_2(t) = (1 - t + 5t^2) \qquad \text{con } t \geq 0\ .$$

(**a**) Dopo quanto tempo i due punti materiali collidono?
(**b**) Qual è la differenza tra le loro velocità nell'istante di collisione?

Esercizio 2.6 Un'automobile da corsa si muove su una pista con velocità costante. Si aziona un cronometro in un punto dove poniamo l'origine di un'ascissa curvilinea. Dopo un tempo t_1 l'auto accelera con accelerazione (scalare) costante $a(t) = a$ e all'istante t_2 raggiunge il chilometro s_2. Quale sarà la velocità, v_2, dell'auto in quell'istante? Questa velocità potrebbe essere troppo alta per affrontare una curva. Quale deve essere allora l'accelerazione (scalare) a' (sempre a partire dall'istante t_1) in modo che l'auto giunga nello stesso punto con velocità v_2'? E a quale istante t_2' vi giungerebbe?
APPLICAZIONE NUMERICA: $t_1 = 15\, s$; $a = 2.4\, m/s^2$; $t_2 = 40\, s$; $s_2 = 1.35\, km$; $v_2' = 216\, km/h$.

Esercizio 2.7 Un'automobile è ferma a un semaforo e, quando la luce diventa verde, accelera uniformemente per un intervallo di tempo $\Delta t = 6\, s$ con un'accelerazione (scalare) $a = 2\, m/s^2$ e poi si muove con velocità costante. Nell'istante in cui l'automobile è partita, essa è stata sorpassata da un autocarro in moto nello stesso verso con una velocità $v_B = 10\, m/s$, che poi viene mantenuta costante.

a) Si costruiscano i diagrammi orari per il moto dell'automobile e per quello dell'autocarro usando gli stessi assi coordinati.

b) Quando l'automobile raggiungerà l'autocarro?

c) Quanto cammino avrà percorso l'automobile quando raggiungerà l'autocarro?

Esercizio 2.8 Un'auto supera un incrocio a una velocità $v = 72\, km/h$ e prosegue alla stessa velocità. Ad un istante successivo, $t_1 = 5\, s$, un'auto della polizia stradale in servizio a quell'incrocio parte al suo inseguimento procedendo con un'accelerazione costante $a_P = 2\, m/s^2$.

a) Quando e a che distanza dall'incrocio la polizia stradale supera l'auto?

b) Qual è la velocità della polizia in quel momento?

NOTA BENE: il termine "partire" indica, anche nel linguaggio comune, che la velocità iniziale è nulla, per cui il moto deve essere necessariamente accelerato.

Esercizio 2.9 Un velocista, inizialmente fermo, corre lungo un rettilineo di lunghezza L in un tempo T. Si approssimi il suo moto ipotizzando un'accelerazione costante nel primo tratto di lunghezza L_1 e poi una velocità costante per il tratto rimanente. Si determinino:

a) la sua velocità finale;

b) l'accelerazione nel primo tratto;

c) il tempo impiegato per percorrere il primo tratto L_1.

APPLICAZIONE NUMERICA: $L = 100\,m$; $T = 10\,s$; $L_1 = 15\,m$.

Esercizio 2.10 Un corpo puntiforme si muove con un'accelerazione scalare costante a, positiva o negativa, su una certa traiettoria. In due istanti successivi, t_1 e t_2, il corpo si trova in due punti della traiettoria, di coordinate s_1 e s_2, dove viene misurata la velocità (scalare) e i suoi valori risultano v_1 e v_2. Dimostrare che la velocità media nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ coincide con la media aritmetica di v_1 e v_2 ed esprimere l'accelerazione a in funzione di $\Delta s = s_2 - s_1$, v_1 e v_2.

Esercizio 2.11 Il tachimetro di un'auto, che percorre una strada diritta, a un certo punto segna una velocità $v_1 = 20\,km/h$; e poi $l = 200\,m$ più avanti una velocità $v_2 = 70\,km/h$.

a) Supponendo che l'accelerazione sia stata costante, quale valore si ricava per l'accelerazione e quale valore per il tempo di percorrenza, a partire dai dati del tachimetro?

b) Disponendo di un cronometro di precisione il conducente verifica, però , che il tempo di percorrenza effettivo è $\Delta t = t_2 - t_1 = 18\,s$. Per controllare, allora, la precisione del suo tachimetro, egli compie un tratto di $L = 2\,km$ mantenendo il tachimetro costantemente su $70\,km/h$ e verifica che il tempo di percorrenza è $100\,s$. Calcolare le due velocità e l'accelerazione *effettive* dell'auto nel tratto iniziale di $200\,m$.

Esercizio 2.12 Consideriamo una velocità che dipende linearmente dal tempo; essa è descritta da una funzione il cui grafico è costituito da due tratti rettilinei (di ampiezza uguale, T) con pendenza opposta, un grafico la cui forma è simile alla lettera **V** capovolta.

Introducendo le opportune costanti (arbitrarie), scrivere l'espressione della posizione in funzione del tempo, cioè la "legge oraria", $s(t)$ e disegnarne il grafico nei seguenti casi: i) la funzione $v(t)$ nasce nell'origine ed è sempre positiva salvo negli estremi; ii) $v(t)$ è per metà positiva e per metà negativa; iii) $v(t)$ è negativa e tocca l'asse dei tempi nel suo punto angoloso.

Esercizio 2.13 All'istante $t = 0$, un treno parte con un'accelerazione (scalare) iniziale $a_0 = 0.4\,m/s^2$; l'accelerazione diminuisce poi linearmente col tempo e si annulla all'istante T in cui il treno ha raggiunto una velocità scalare $V_f = 90\,km/h$. Si determini lo spazio S percorso dal treno fino all'istante T.

Esercizio 2.14 Una palla viene lanciata lungo la verticale verso l'alto da una quota $z_0 = h$ con una velocità $v_z = v_0$. La palla è soggetta all'accelerazione di gravità ed è trascurabile la resistenza dell'aria. Qual è l'istante t_1 in cui raggiunge la quota massima e quale l'espressione di $H = z_{\max}$? Quale sarà la quota e la velocità della palla all'istante $t_2 = 2\,t_1$?

Esercizio 2.15 Si può usare, molto utilmente, un foglio elettronico (tipo EXCEL) per studiare il moto lungo la verticale di un grave (corpo puntiforme soggetto all'accelerazione di gravità). Per chi ne avesse bisogno, sulla pagina-web "http://people.na.infn.it/clarizia/"c'è una guida all'uso di EXCEL, nella quale si possono apprendere i rudimenti.

Nella prima riga del foglio conviene scrivere le lettere che rappresentano le grandezze fisiche i cui valori saranno tabulati nelle colonne sottostanti (eventualmente separate da alcune colonne vuote, ad evidenziare il ruolo differente). Un suggerimento è il seguente:

t	z	v			Δt	z₀	v₀

Le ultime 3 etichette indicano i parametri, che vanno inseriti sotto nella seconda riga e possono essere cambiati a piacere; questi valori non vanno inseriti direttamente nelle formule delle colonne precedenti, ma va inserita l'etichetta della cella in modo che, una volta cambiato il valore, tutte le colonne vengano ricalcolate automaticamente e così anche il grafico. Δt è il "passo" temporale con cui si vogliono ottenere i punti del grafico, elencati nella prima colonna; z_0 e v_0 sono le condizioni iniziali, che entrano nelle formule che andranno inserite nella seconda e nella terza colonna alla seconda riga. Anche l'accelerazione di gravità g potrebbe essere considerata un parametro. Provate dunque a generalizzare l'esempio in modo da ottenere moti sulla luna, o qualsiasi altra gravità, semplicemente modificando un valore numerico in una cella.

Esercizio 2.16 Un corpo viene lanciato verso l'alto a partire dal suolo e ricade nel punto di partenza. Sapendo che nell'ultimo secondo di volo percorre uno spazio di $20\,m$, si determini la sua velocità iniziale v_0 e la massima altezza h da esso raggiunta. Si trascuri la resistenza dell'aria.

Esercizio 2.17 Un missile è lanciato verticalmente e, in virtù dei suoi motori, sale con una accelerazione doppia, in modulo, dell'accelerazione di gravità . Tale moto dura per un tempo t_1, dopodiché, esauritosi il carburante, il moto del missile diventa quello di un grave inerte. Si calcoli in termini di t_1:

a) la quota massima raggiunta dal missile;

b) la durata complessiva del volo, dal lancio alla ricaduta sulla terra.

(Si trascurino la resistenza dell'aria e la variazione dell'accelerazione di gravità con l'altezza.)

Esercizio 2.18 Un sasso viene lasciato cadere con velocità nulla da un'altezza $H = 50\,m$ rispetto al suolo e nello stesso istante un altro sasso viene lanciato in alto sulla stessa verticale da un'altezza $h = 10\,m$ con velocità iniziale v_0.

a) Se i due sassi si urtano ad un'altezza $h_1 = 20\,m$, quanto vale v_0 e che velocità hanno rispettivamente i due sassi subito prima dell'urto?

b) Calcolare il valore minimo di v_0 per il quale i due sassi si urtano a quota nulla, immediatamente prima di giungere al suolo.

Esercizio 2.19 Una palla da tennis è lasciata cadere dal terrazzo di un grattacielo di altezza H rispetto al suolo. L'abitante di un appartamento osserva che la palla impiega un tempo $\Delta t = 0.25\,s$ per attraversare tutta la sua finestra, di altezza $h = z(t_1) - z(t_2) = 2.5\,m$. La palla da tennis cade fino al suolo dove rimbalza elasticamente (riparte cioè con la stessa velocità in modulo) e riappare al bordo inferiore della finestra $4\,s$ dopo averla superata. Determinare quanto tempo impiega per cadere dal terrazzo al suolo, $t_{\rm tot}$, e l'altezza H del terrazzo (trascurare la resistenza dell'aria).

Esercizio 2.20 Una ruota inizialmente in quiete viene messa in rotazione attorno al suo asse e la sua velocità angolare cresce uniformemente per un intervallo di tempo $t_1 = 10\,s$ fino a raggiungere il valore $\omega_1 = 10\,\pi\ rad/s$; la velocità angolare viene poi mantenuta costante per un intervallo di tempo $t_2 - t_1 = 5\,s$, dopodiché viene fatta diminuire uniformemente e in un intervallo di tempo $t_3 - t_2 = 10\,s$ la ruota si arresta. Si calcoli il numero N complessivo dei giri fatti dalla ruota.

3 Moti in due dimensioni

Esercizio 3.1 Un pallone viene calciato da una quota iniziale h con una velocità di modulo $|\vec{v}_0| = v_0$ e angolo (con l'orizzontale) α. Si vuole centrare la porta avversaria che è alta z_1 e si trova ad una distanza x_1 dal punto di lancio. Si trovi l'intervallo di valori entro i quali deve essere compreso v_0 affinché il pallone entri direttamente in porta.

APPLICAZIONE NUMERICA: $h = 40\,cm$; $\alpha = 40°$; $z_1 = 2.44\,m$; $x_1 = 24\,m$.

Esercizio 3.2 Anche qui si può utilizzare un foglio elettronico per studiare il moto parabolico di un corpo puntiforme soggetto alla accelerazione di gravità in un piano verticale $x - y$. (Ricordiamo che si può usare la guida all'uso di EXCEL che è sulla pagina-web già citata, "http://people.na.infn.it/clarizia/", per imparare i rudimenti). Dalla figura 8 si può trarre spunto per il contenuto della prima riga del foglio:

t	x	y	v_x	v_y	v_s	α (radianti)	α (gradi)	Δt	v_0	α_0	h_0

Figura 8: relativa all'esercizio **3.2**

Questa riga sta ad indicare semplicemente quello che andrà inserito nelle colonne sottostanti, mediante le opportune formule; v_s indica la velocità scalare, α indica l'angolo della velocità con il semiasse positivo delle x. Le ultime 4 etichette indicano i parametri che vanno inseriti sotto e possono essere cambiati a piacere; questi valori non vanno inseriti direttamente nelle formule delle colonne precedenti, ma va inserita l'etichetta della cella in modo che, una volta cambiato il valore, tutte le colonne vengano ricalcolate automaticamente e così anche il grafico. In questo caso: Δt è il "passo"temporale con cui si vogliono ottenere i punti del grafico; v_0 è il modulo della velocità iniziale, mentre α_0 è l'angolo iniziale di questa velocità (Memento: si può esprimerlo in gradi, ma va ricalcolato in radianti nella cella sotto e a questa dovranno fare riferimento le formule di seno e coseno); h_0 è l'altezza iniziale del lancio.

Esercizio 3.3 Un corpo sale scivolando senza attrito lungo un piano inclinato di $\alpha = \pi/4\,rad$ rispetto all'orizzontale, soggetto ad una accelerazione diretta verso il basso (e parallela al piano inclinato) di modulo $|\vec{a}| = g \sin\alpha$ (vedi la figura 9). L'altezza del piano inclinato è $\overline{OB} = h = 45\,cm$ e la velocità iniziale, $v_0 = |\vec{v}_0|$ che il corpo possiede nel punto A, è doppia di quella che gli permetterebbe di arrivare in B con velocità nulla. Si calcoli la lunghezza del segmento $\overline{OC}$.

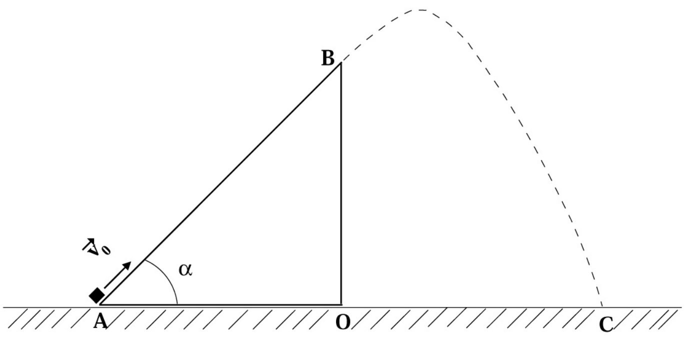

Figura 9: relativa all'esercizio **3.3**

Esercizio 3.4 Un aereo in picchiata si muove con velocità costante di modulo $|\vec{v}| = 360\,km/h$, mantenendo un'inclinazione costante $\alpha = -\pi/6\,rad$ rispetto all'orizzontale. Ad un'altezza $h = 800\,m$ l'aereo sgancia una prima bomba e dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 1\,s$ una seconda bomba. Si calcoli (trascurando la resistenza dell'aria) la distanza d tra i punti in cui le bombe raggiungono il suolo.

Esercizio 3.5 Un corpo puntiforme viene lanciato da un'altezza $h_1 = 10\,m$ rispetto alla superficie di un lago, che è profondo $h_2 = -5\,m$ (vedi la figura 10). La velocità iniziale del corpo è: $|\vec{v}_0| = 10\,m/s$ e il vettore forma un angolo $\alpha = 30°$ con il semiasse positivo delle x.

Supponendo che l'effetto della resistenza dell'acqua sul moto del corpo, senza gravità, sia quello di decelerarlo nelle due direzioni x e z della stessa quantità indipendentemente dai valori della velocità, e che quindi all'accelerazione di gravità si sommi un'accelerazione con componenti, relativamente agli assi così come appaiono in figura, $a_x = -3\,m/s^2$ e $a_z = 3\,m/s^2$, calcolare:

(a) la coordinata del corpo sul fondo del lago (nel sistema della figura);

(b) il tempo impiegato dal corpo per percorrere l'intera traiettoria.

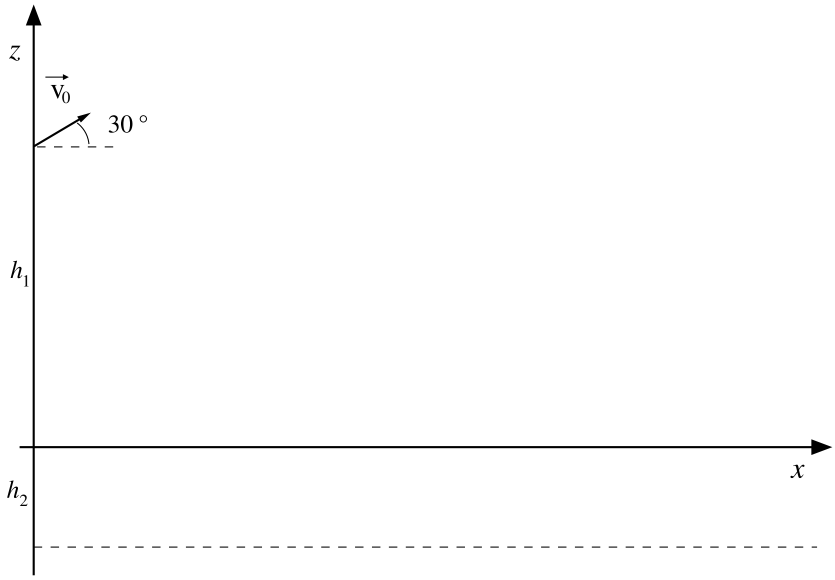

Figura 10: relativa all'esercizio **3.5**

Esercizio 3.6 Ad un'altezza dal suolo $h = 7.1\,m$ si lancia orizzontalmente con velocità $|\vec{v}_0| = 9.1\,m/s$ una pallina di gomma (vedi una schematizzazione nella figura 11).

a) Si calcoli la distanza l_1 da O del punto P_1 nel quale la pallina tocca terra, le componenti secondo gli assi x e z del vettore velocità $\vec{v}_1$ e l'angolo α che questo forma con il semiasse positivo delle x al momento dell'urto.

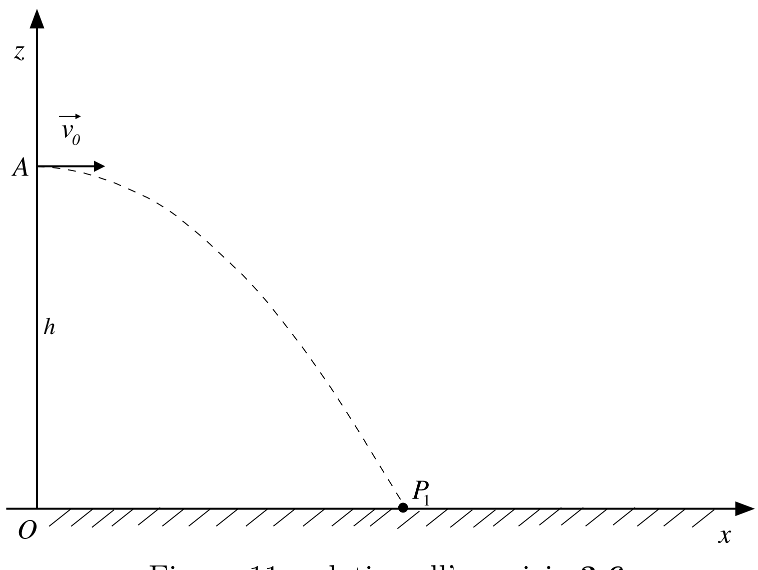

Figura 11: relativa all'esercizio **3.6**

Nell'urto si ha una diminuzione del modulo della velocità: la componente della velocità secondo l'asse x, subito dopo l'urto, risulta inferiore del 20 % al valore che aveva subito prima dell'urto, la componente secondo l'asse z cambia segno e in valore assoluto diminuisce del 20 %.

b) Si calcoli l'altezza massima raggiunta dopo il primo rimbalzo e la distanza l_2 da O del successivo punto P_2 di urto della pallina sul suolo.

c) E poi? Se si ipotizza la stessa perdita ad ogni rimbalzo, la pallina si allontanerà indefinitamente lungo l'asse x?

Esercizio 3.7 Da un punto O di un piano, che è inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, viene calciato un pallone con una velocità iniziale di modulo $|\vec{v}_0|$, diretta nel verso ascendente del piano e con un angolo β rispetto al profilo del piano inclinato. Determinare la distanza l, dal punto O, del punto in cui cade il pallone, il modulo della velocità d'incidenza con il piano e il suo angolo, o rispetto al piano inclinato stesso oppure rispetto alla direzione orizzontale (si consideri il pallone puntiforme e trascurabile la resistenza dell'aria).
APPLICAZIONE NUMERICA: $\alpha = 30°$; $|\vec{v}_0| = 18\, m/s$; $\beta = 20°$.

Esercizio 3.8 Una pallina, lasciata cadere da ferma sopra un piano privo di attrito (inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale), da un'altezza h rispetto ad un punto A del piano, rimbalza elasticamente nel punto A e ricade nuovamente sul piano inclinato in un punto B (vedi figura 12).

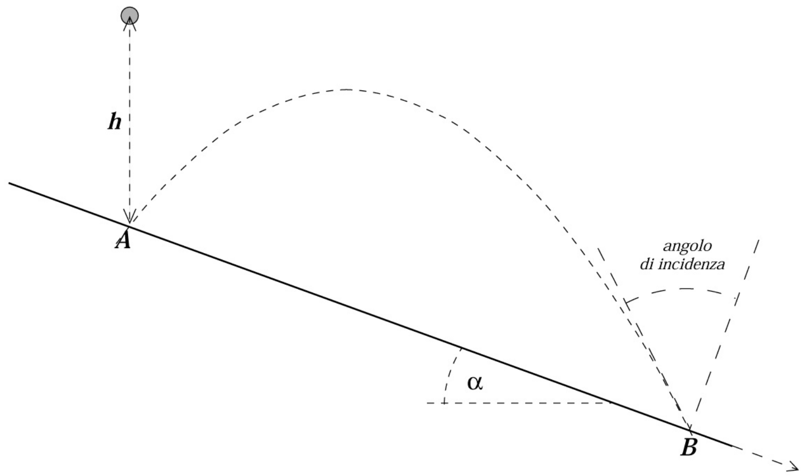

Figura 12: relativa all'esercizio **3.8**

Determinare:

a) il tempo che intercorre tra il rimbalzo in A e quello in B e la differenza di quota tra A e B;

b) l'angolo di incidenza in B, φ_i, rispetto alla perpendicolare al piano inclinato.

APPLICAZIONE NUMERICA: $h = 180\, cm$; $\alpha = 20°$.

Esercizio 3.9 Sono date due traiettorie del moto di un punto materiale in un piano (spazio fisico a 2-dimensioni), nel quale sia stato introdotto un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $x - y$ (con $u = 1\, m$), e per ciascuna di esse sia dato l'andamento col tempo della coordinata x, cioè la funzione $x(t)$:

$$\gamma_1 : \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\, x \quad ; \quad x(t) = \frac{3}{2}\, t^2$$
$$\gamma_2 : \quad y = \frac{x^2}{4} - 1 \quad ; \quad x(t) = 2\, t\, .$$

Caratterizzare i due moti analiticamente e graficamente: scrivere la legge oraria in maniera completa, le componenti cartesiane del vettore $\vec{v}(t)$ e così anche del vettore $\vec{a}(t)$, i due moduli (sempre in funzione del tempo) e rappresentare questi vettori, nel sistema $x - y$, in corrispondenza delle posizioni a $t_1 = -2\, s$, $t_2 = -1\, s$, $t_3 = 0\, s$ e $t_4 = 2\, s$.

Esercizio 3.10 Si consideri un vettore $\vec{A}(t)$ che ruoti nel tempo, nel piano $x-y$, mantenendo costante il suo punto di applicazione e il suo modulo, secondo la legge oraria:

$$\vec{A}(t) = A\cos(\omega t)\,\hat{x} + A\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

dove ω e A sono costanti. Si trovi $d\vec{A}/dt$ (si noti che $\hat{x}$ e $\hat{y}$ si comportano come costanti nella derivazione). Si dimostri che $d\vec{A}/dt$ è perpendicolare ad $\vec{A}$ e si introduca un opportuno vettore $\vec{\omega}$ (quale?) tale che $d\vec{A}/dt = \vec{\omega} \times \vec{A}$.

Esercizio 3.11 Un punto materiale si muove in un piano con un'accelerazione ed una velocità i cui moduli sono, rispettivamente, $|\vec{a}(t)| = a(t)$ e $|\vec{v}(t)| = v(t)$. Inoltre si consideri $t \geq 0$.

a) Se $a(t) = a_0$ e $v(t) = v_0$, costanti, determinare il valore dell'angolo tra il vettore velocità ed il vettore accelerazione e la traiettoria del punto materiale.

b) Se il modulo della velocità vale $v(t) = kt$ con k costante positiva, quale espressione avrà $a(t)$ se la traiettoria è identica a quella precedentemente determinata?

APPLICAZIONE NUMERICA: $v_0 = 3.0\,m/s$; $a_0 = 1.5\,m/s^2$.

Esercizio 3.12 All'istante $t = 0$ un'automobile, partendo da ferma dal punto P_0, si mette in movimento lungo una pista circolare di raggio $R = 100\,m$ (si veda la Figura 13). Nella prima fase del moto l'andamento con il tempo dell'ascissa curvilinea s è $s(t) = c\,t^3$ con $c^{-1} = 120\,s^3/m$. Si calcoli l'istante t_1 in cui i moduli delle componenti tangenziale e centripeta dell'accelerazione sono uguali.

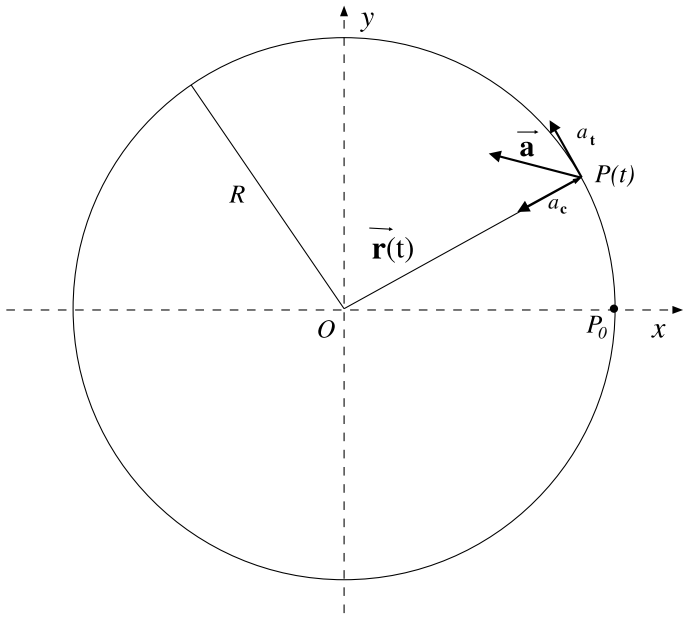

Figura 13: relativa agli esercizi **3.12**, **3.13** e **3.14**

Esercizio 3.13 Su una pista circolare di raggio R, un punto materiale, inizialmente fermo, si muove con accelerazione tangenziale costante e positiva, fino ad un istante t_1 in cui $\vec{v}$ e $\vec{a}$ formano un angolo α. Poi mantiene costante la sua velocità . Dall'istante in cui è partito fino a quello in cui completa un giro di pista, trascorre un tempo t_2.

Determinare lo spazio s_1 percorso sulla traiettoria fino all'istante t_1, la velocità v_1 raggiunta in questo istante, il valore del tempo t_1 e l'accelerazione a_t del primo tratto (utilizzare la Figura 13 per immaginare e disegnare l'intero moto del punto materiale).

APPLICAZIONE NUMERICA: $R = 200\,m$; $\alpha = 60°$; $t_2 = 1.8\,min$.

Esercizio 3.14 Un'auto parte da ferma su di una pista circolare di raggio $R = 100\,m$ e comincia a muoversi con accelerazione tangenziale di modulo costante (vedi la Figura 13). Ad un certo istante t_1, in cui ha raggiunto una velocità $v_1 = 50\,km/h$ ed una accelerazione (totale) $\vec{a}_1$ il cui modulo è $|\vec{a}_1| = 10\,m/s^2$, l'auto comincia a frenare con accelerazione tangenziale di modulo costante.

Determinare le componenti del vettore accelerazione $\vec{a}_2$, nel sistema di riferimento in figura, all'istante $t_2 = 10\,s$, sapendo che l'auto ha percorso uno spazio complessivo, dal punto iniziale P_0, di $100\,m$. Si può dunque scrivere, introducendo un sistema di ascisse curvilinee sulla traiettoria, con origine in P_0, che $s_2 = s(t_2) = 100\,m$.

Esercizio 3.15 Su una pista circolare di raggio R, un corpo puntiforme si muove con accelerazione scalare a, costante e positiva. All'istante iniziale si trova in un punto P_0 e la sua velocità è v_0 e ad un istante t_1 il corpo si trova in un punto P_1 in cui il vettore accelerazione è tangente alla curva. Se, successivamente, il corpo passa nuovamente per il punto P_1 all'istante t_2, determinare l'istante t_1, l'accelerazione a e l'angolo tra i vettori velocità ed accelerazione nell'istante t_2.

[Osservazione: l'angolo richiesto può essere trovato algebricamente a prescindere dai valori numerici di R, t_2 e v_0.]
APPLICAZIONE NUMERICA: $R = 80\,m$; $v_0 = -12\,m/s$; $t_2 = 50.5\,s$.

Esercizio 3.16 Un corpo puntiforme percorre la sua traiettoria nel seguente modo:

1) Parte, da fermo, da un punto O al tempo $t = 0$ e raggiunge al tempo t_1 una velocità scalare v_1.

2) Prosegue con velocità scalare costante fino al tempo t_2.

3) Prosegue poi fino al tempo t_3 con accelerazione scalare costante a.

Determinare il modulo dell'accelerazione vettoriale media, $|\vec{a}_m|$, nei tre intervalli di tempo in cui si svolge il moto e nei seguenti due casi:

a) Il moto è rettilineo.

b) Il moto è circolare con raggio r.

APPLICAZIONE NUMERICA: $t_1 = 2.5\,s$; $v_1 = 7.2\,m/s$; $t_2 = 4.9\,s$; $t_3 = 6.5\,s$; $a = 1.8\,m/s^2$; $r = 12\,m$.

RISPOSTE "Unità A"

(abbiamo assunto $g = 9.81\, m/s^2$)

1.1 – $\widehat{AC} = (0.8\,,\ 0.6)$; $\overrightarrow{PT} = (30\,,\ 20)\, m$; $\overrightarrow{TA} = (50\,,\ -35)\, m$; $\overrightarrow{PC} = (100\,,\ 0)\, m$
$\left|\overrightarrow{PT}\right| + \left|\overrightarrow{TA}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| = 122.1\, m$

1.2 – $\vec{A} \perp \vec{C}$ $\quad \vec{A} \perp \vec{D}$ $\quad \vec{B} \perp \vec{C}$

1.3 – $B_A\, \hat{A} = 0.33\ (2, 1, 1)$; $\quad C_A\, \hat{A} = 0$; $\quad D_A\, \hat{A} = 0$; $\quad E_A\, \hat{A} = 4.33\ (2, 1, 1)$

1.4 – $|\vec{B}| = 2\sqrt{31}\, u$; $\quad \theta = 128.9°$

1.5 – $\left|\overrightarrow{AD}\right| = 11.2\, km$, $\ 2.3°$ a nord dell'est

1.6 – $|\vec{D}| = 2\sqrt{21}\, u$; $\quad \beta = 70.9°$

1.7 – **a)** $\vec{F} = -2\, \vec{D}$ $\quad$ **b)** Esse sono proporzionali.

1.8 – Essi soddisfano la: $\ \vec{A} \pm \vec{B} \pm \vec{C} = 0$

1.9 – $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\, (\vec{d}_1 - \vec{d}_2)$ $\quad \vec{b} = \dfrac{1}{2}\, (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)$

1.10 – Dimostrazione

1.11 – Dimostrazione

1.12 – $|\vec{p}_3| = 70\, g_{\text{peso}}$ $\quad \beta = 21.8°$ $\quad \alpha = 38.2°$

1.13 – $\vec{C} = c(-9\, \hat{\imath} + 13\, \hat{\jmath} + 8\, \hat{k})$ $\quad c \in \mathbf{R}$

1.14 – Dimostrazione

1.15 – $\hat{n} = \pm(0.25\, \hat{\imath} + 0.89\, \hat{\jmath} - 0.38\, \hat{k})$

1.16 – **a)** $\sin\theta = 0.992$ $\quad$ **b)** Area $= 3.84\, m^2$ $\quad$ **c)** $\theta = 97.4°$

1.17 – $\varphi_{12} = 97.2°$, $\quad \varphi_{23} = 138.6°$, $\quad \varphi_{31} = 124.2°$

1.18 – Dimostrazione

1.19 – $\overrightarrow{M}_C = (2\,,\ -7\,,\ -2)$

1.20 – $|\vec{N}| = 12.9\, N$; $\quad |\vec{f}_{a_1}| = 9.00\, N$; $\quad |\vec{N}_1| = 32.0\, N$; $\quad |\vec{N}_2| = 50.0\, N$; $\quad d = 0.80\, m$

1.21 – $|\vec{N}| = 3.53\, N$; $\quad |\vec{N}_1| = 1.59\, N$; $\quad |\vec{f}_{a_1}| = |\vec{f}_{a_2}| = 2.12\, N$; $\quad |\vec{N}_2| = 14.6\, N$; $\quad \theta = 36.9°$

1.22 – $\vec{R}_C = |\vec{R}_C|\, \dfrac{\overrightarrow{BC}}{l}$; $\quad |\vec{R}_C| = 81.9\, N$; $\quad |\vec{N}_A| = 515\, N$; $\quad |\vec{N}_B| = 73.6\, N$; $\quad |\vec{\tau}| = 35.9\, N$

1.23 – $|\vec{N}_B| = 15.7\, N$; $\quad |\vec{\tau}_B| = 13.6\, N$; $\quad |\vec{\tau}_A| = 10.4\, N$; $\quad |\vec{N}_A| = 8.74\, N$

2.1 – **a)** $t_2 = 675\, s$ $\quad$ **b)** $v_2 = 81\, km/h$ $\quad x'(t = 1\, h) - x(t = 1\, h) = 9\, km$

2.2 – B sorpassa A ; $\quad x = 52.3\, km$; $\quad t = 1.25\, h = 1^h 15^m$ $\ (= 1.247\, h = 1^h 14^m 48^s)$

2.4 – $(\Delta t)_B = 70\, s$; $\quad (\Delta x)_B = 2.8\, km$

2.5 – **a)** $t_c = 2\, s$ $\quad$ **b)** $v_{2,1}(t_c) \equiv v_2(t_c) - v_1(t_c) = 8\, m/s$

2.6 – $v_2 = 75\, m/s$ $\quad a' = 1.5\, m/s^2$ $\quad t_2' = 45\, s$

2.7 – **b)** $t_2 = 18\, s$ $\quad$ **c)** $s_2 = 180\, m$

2.8 – **a)** $t_2 = 29.1\, s,\ \ s_2 = 583\, m$ $\quad$ **b)** $v_P(t_2) = 174\, km/h$

2.9 – **a)** $v_f = 11.5\, m/s$ $\quad$ **b)** $a = 4.41\, m/s^2$ $\quad$ **c)** $t_1 = 2.61\, s$

2.10 – Dimostrazione

2.11 – **a)** $\Delta t = 16\, s,\ \ a = 0.87\, m/s^2$ $\quad$ **b)** $v_{1\text{eff}} = 8\, km/h$,
$v_{2\text{eff}} = 72\, km/h$, $\quad a_{\text{eff}} = 0.99\, m/s^2$

2.13 – $T = 125\, s$ $\quad S(T) \simeq 2080\, m$

2.14 – $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$ $\quad H = h + \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{g}$ $\quad z_2 = h$ $\quad v_2 = -v_0$

2.16 – $v_0 = 24.9\,m/s$ $\quad h = z_{\max} = 31.6\,m$

2.17 – **a)** $z_{\max} = 3\,g\,t_1^2$ $\quad$ **b)** $t_{\text{tot}} = (3+\sqrt{6})\,t_1$

2.18 – **a)** $v_0 = 16.2\,m/s,\quad V(t^*) = -24.2\,m/s,\quad v(t^*) = -8\,m/s$ $\quad$ **b)** $v_{0\min} = 12.5\,m/s$

2.19 – $t_{\text{tot}} = 3.14\,s$ $\quad H = 48.5\,m$

2.20 – $N = 75$

3.1 – $15.31\,m/s < v_0 < 16.31\,m/s$

3.3 – $\overline{OC} = 3.1\,m$

3.4 – $d \simeq 54\,m$

3.5 – $x_f \simeq 20\,m$ $\quad t_{\text{tot}} = 2.3\,s$

3.6 – **a)** $l_1 = 11\,m,\quad v_{1x} = 9.1\,m/s,\quad v_{1z} = -12\,m/s,\quad \alpha = -52°$

b) $z_{\max} = 4.54\,m,\quad l_2 = 25\,m$

3.7 – $l = 19.4\,m$ $\quad |\vec{v}(t_V)| = 11.6\,m/s$ $\quad \gamma'(t_V) = -32.1°$ $\quad \gamma(t_V) = -2.1°$

3.8 – **a)** $t_V = 1.21\,s$ $\quad z_A - z_B = 1.68\,m$ $\quad$ **b)** $\varphi_i = 47.5°$

3.9 – Da svolgere analiticamente e graficamente.

3.10 – $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \omega A\,(-\hat{x}\sin(\omega t) + \hat{y}\cos(\omega t))\ ;$ $\quad \vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{A}}{dt} = 0\ ;$ $\quad \vec{\omega} = \omega\,\hat{z}$

3.11 – **a)** $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ circonferenza di raggio $= r = 6\,m$ $\quad$ **b)** $a(t) = \dfrac{k}{r}\sqrt{r^2 + k^2 t^4}$

3.12 – $t_1 = 20\,s$

3.13 – $s_1 = 173\,m$ $\quad v(t_1) = 13.2\,m/s$ $\quad t_1 = 26.2\,s$ $\quad a_t = 0.506\,m/s^2$

3.14 – $a_{2x}(t_2) \simeq 0.4\,m/s^2$ $\quad a_{2y}(t_2) \simeq -0.8\,m/s^2$

3.15 – $a = 0.799\,m/s^2$ $\quad t_1 = 15.0\,s$ $\quad v_2 = 28.3\,m/s$ $\quad \alpha = \arctan(4\pi) = 85.5°$

3.16 – **a)** $|\vec{a}_m|_{(t_1)} = 2.9\,m/s^2$ $\quad |\vec{a}_m|_{(t_2\,-\,t_1)} = 0$ $\quad |\vec{a}_m|_{(t_3\,-\,t_2)} = a = 1.8\,m/s^2$

b) $|\vec{a}_m|_{(t_1)} = 2.9\,m/s^2$ $\quad |\vec{a}_m|_{(t_2\,-\,t_1)} = 4.0\,m/s^2$ $\quad |\vec{a}_m|_{(t_3\,-\,t_2)} = 9.1\,m/s^2$