UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"
Corso di Laurea in FISICA

Esercitazioni di **MECCANICA e TERMODINAMICA**

Anno Accademico 2017–2018

UNITÀ **B**

Dinamica del corpo puntiforme

[a cura di Alberto Clarizia]

1 Equazione del moto (di Newton) in sistemi di riferimento inerziali

1.1 Moti rettilinei: vincolo rigido liscio, forza peso, tensione

Esercizio 1.1 Su di un piano inclinato, con angolo di base α, ad altezza h viene lasciato in quiete un corpo puntiforme di massa m. L'attrito tra il corpo e il piano è del tutto trascurabile. Trovare le espressioni del tempo di caduta e della velocità di arrivo alla base. Ha rilevanza la massa m? Confrontare con il caso del moto libero del grave, lasciato da fermo da un'altezza h.

Esercizio 1.2 Un ascensore di massa $m = 1\,ton$ discende con la velocità costante $|\vec{v}| = 80\,m/min$ sostenuto da un cavo di massa trascurabile. In quanto tempo e in quanti metri potrà arrestarsi senza spezzare il cavo il cui carico di rottura è $\tau_{\max} = 1500\,kg_{\text{peso}}$?

Esercizio 1.3 Un filo inestensibile passa nella gola della puleggia di una carrucola fissata al soffitto mediante un'asta rigida (vedi figura 1); ad una estremità del filo è attaccato un corpo di massa $m = 40\,kg$ mentre all'altra estremità è applicata una forza $\vec{F}$ costante nel tempo. Le masse della carrucola, dell'asta e del filo sono trascurabili rispetto a m. L'attrito sul perno della puleggia è trascurabile, mentre il filo non scivola nella gola della puleggia. Si calcolino le intensità della forza $\vec{F}$ e della reazione vincolare $\vec{R}$ nei casi seguenti:

a) il corpo di massa m resta fermo;

b) il corpo sale verso l'alto con velocità costante di modulo $|\vec{v}| = 0.2\,m/s$;

c) il corpo sale verso l'alto con accelerazione costante di modulo $|\vec{a}| = 0.1\,|\vec{g}|$ (di solito, per brevità, indicheremo con g il modulo del vettore $\vec{g}$, con valore numerico $g = 9.81\,m/s^2$).

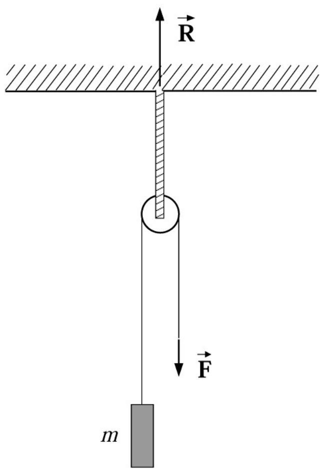

Figura 1: relativa all'esercizio **1.3**.

Esercizio 1.4 Due corpi di masse $m_1 = 4\,kg$ e $m_2 = 2\,kg$, soggetti rispettivamente alle forze esterne $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, di moduli $|\vec{F}_1| = 6\,N$ e $|\vec{F}_2| = 3\,N$, dirette come indicato in figura 2, sono collegati da un filo inestensibile e di massa trascurabile (*ideale*). Si calcoli la tensione τ del filo.

Figura 2: relativa all'esercizio **1.4**.

Esercizio 1.5 Si calcoli il modulo delle accelerazioni dei corpi, le tensioni dei fili e il modulo della reazione vincolare $\vec{R}$ nei tre casi considerati nella figura 3. Si suppongano le carrucole ideali (di massa e raggio trascurabili) e i fili ideali (inestensibili e di massa trascurabile).

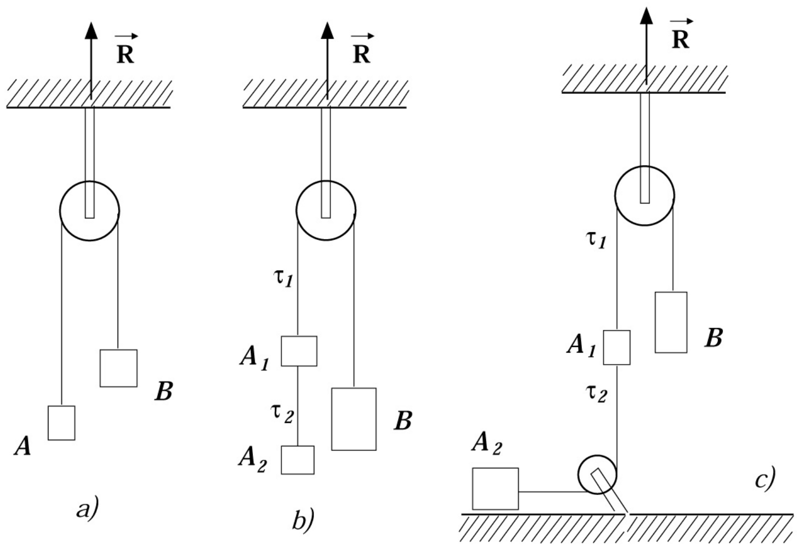

Figura 3: relativa all'esercizio **1.5**. Le condizioni sulle masse sono le seguenti:

a) $m_B > m_A$ **b)** $m_B > m_{A_1} + m_{A_2}$ **c)** $m_B > m_{A_1}$

Esercizio 1.6 Sia dato il sistema nella figura 4. La prima carrucola è fissa mentre la seconda è una carrucola mobile, che ruota senza attrito sul perno al quale è attaccato il corpo C. Supponendo che le carrucole e i fili siano ideali e che il piano sia liscio, si determini l'accelerazione del corpo C e la tensione del filo che lega i corpi A e B.

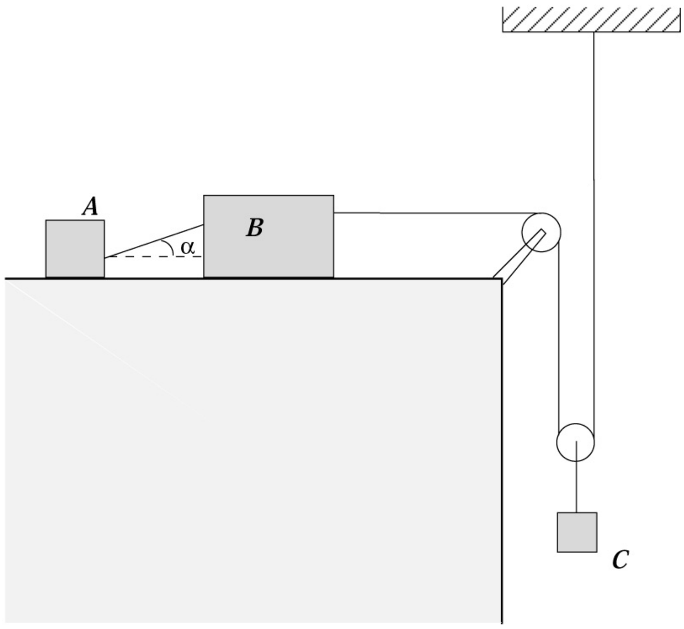

Figura 4: relativa all'esercizio **1.6**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $\alpha = 60°$; $m_A = 100\,g$; $m_B = 200\,g$; $m_C = 300\,g$.

1.2 Moti rettilinei: vincolo rigido con attrito radente, forza peso, forza elastica, tensione

Esercizio 1.7 Su di un piano inclinato, con angolo di base α, ad altezza h viene lasciato in quiete un corpo puntiforme di massa m. Tra il corpo e il piano c'è attrito e i coefficienti di attrito sono μ_s e μ_d (essendo $\mu_s \geq \mu_d$). Trovare la condizione per cui il corpo si mette in moto. Trovare le espressioni del tempo di caduta e della velocità di arrivo alla base.

Esercizio 1.8 Un cubetto C assimilabile ad un corpo puntiforme, di massa m, è appoggiato su un piano orizzontale. Fra la base del cubetto e il piano non c'è attrito. C è agganciato all'estremo libero di una molla ideale, di costante elastica (detta anche "costante di Hooke") k, che ha l'altro estremo fissato in modo che l'asse della molla sia orizzontale. Nell'istante iniziale la molla non è deformata e C ha una velocità $\vec{v}_0$, diretta secondo l'asse della molla e con verso tale da portare C a comprimerla (vedi la figura 5). Scrivere la legge oraria del moto del cubetto e calcolare il periodo T dell'oscillazione e il massimo valore della compressione della molla.

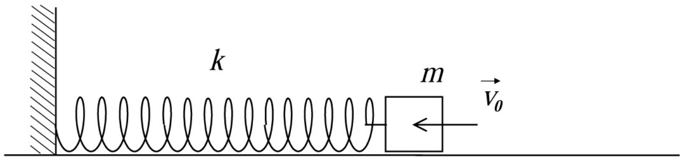

Figura 5: relativa all'esercizio **1.8**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 140\,g$; $k = 0.8\,N/m$; $|\vec{v}_0| = 65\,cm/s$.

Esercizio 1.9 Una molla ideale, di massa trascurabile e costante elastica $k = 100\,N/m$, è disposta verticalmente con l'estremità superiore attaccata a un sostegno fisso; all'altra estremità della molla è fissato un corpo di massa $m = 4\,kg$. Quando la lunghezza della molla è uguale a quella di riposo, la velocità del corpo è diretta verso l'alto e ha modulo $|\vec{v}_0| = 1.5\,m/s$. Si calcolino il periodo T, l'ampiezza A e la fase iniziale φ_0 del moto oscillatorio compiuto dal corpo e, avendo scelto un opportuno sistema di riferimento, si disegni il grafico orario.

Esercizio 1.10 Si consideri un cubetto di massa m ed una molla ideale di costante elastica k poggiati su di un piano orizzontale, come descritto nella figura 6. C'è attrito fra la base del cubetto e il piano e il coefficiente di attrito dinamico è μ_d. se si abbandona il cubetto in quiete appoggiato (non agganciato) alla molla compressa e la compressione iniziale è $\delta = -\Delta l = -(l - l_0)$, il cubetto comincia a muoversi (il coefficiente di attrito statico è di poco superiore a quello dinamico): di quanto si sposta complessivamente, fino a fermarsi?

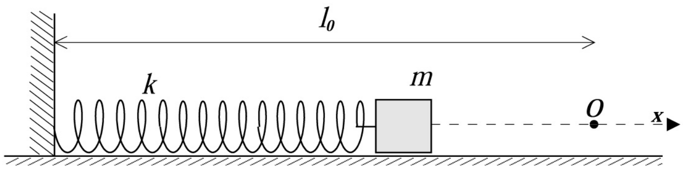

Figura 6: relativa all'esercizio **1.10**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 140\,g$; $k = 0.8\,N/m$; $\mu_d = 0.04$; $\delta = 30\,cm$.

Esercizio 1.11 Un mattone, che può essere considerato a tutti gli effetti puntiforme, è appoggiato su una guida rettilinea, inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale, raccordata in basso con un pavimento orizzontale. Sia la guida che il pavimento presentano, rispetto al mattone,

lo stesso tipo di attrito con coefficiente di attrito dinamico μ_d, mentre quello di attrito statico è di poco superiore. Il raccordo, di lunghezza trascurabile, è arrotondato in modo da evitare al mattone urti, sobbalzi, ecc. Nell'istante iniziale il mattone viene abbandonato in quiete sulla guida, ad un'altezza h dal pavimento, e comincia a muoversi. Studiare il moto del mattone; in particolare calcolare il massimo valore del modulo della velocità e la lunghezza complessiva del percorso compiuto.
APPLICAZIONE NUMERICA: $\alpha = 35°$; $\mu_d = 0.4$; $h = 3\,m$.

Esercizio 1.12 Un blocchetto è lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato scabro (con coefficienti d'attrito $\mu_d = 0.36$ e $\mu_s = 0.38$) con inclinazione α rispetto all'orizzontale. Il blocchetto parte dal piede di esso con velocità v_0.

a) Determinare il valore dell'angolo α tale che il blocchetto ritorni al punto di partenza con velocità dimezzata.

b) Nel caso in cui la $v_0 = 2\,m/s$, calcolare la massima quota rispetto al suolo che il blocchetto raggiunge, per quel valore di α, ed il tempo impiegato a raggiungerla.

c) Si supponga ora $\alpha' = \alpha/2$. Si dimostri che ora il blocchetto si ferma sul piano inclinato e si determini la quota rispetto al suolo del punto di arresto del blocchetto a parità di velocità iniziale.

Esercizio 1.13 Si considerino i blocchetti di masse m_1 e m_2 rappresentati nella figura 7. Il filo che li lega è inestensibile e di massa trascurabile e passa per una carrucola di massa trascurabile. Tra blocchetti e piani c'è attrito e i due coefficienti di attrito dinamico sono μ_1 e μ_2. Determinare l'accelerazione con la quale si muovono i corpi e la tensione del filo.

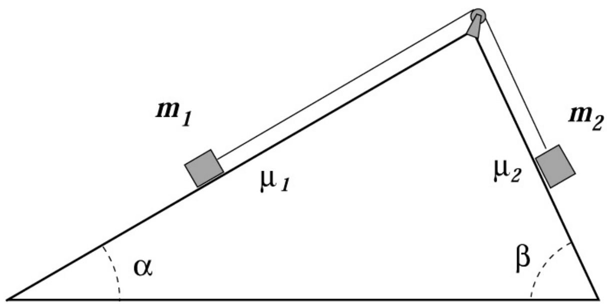

Figura 7: relativa all'esercizio **1.13**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m_1 = 200\,g$; $m_2 = 150\,g$; $\mu_1 = 0.01$; $\mu_2 = 0.02$; $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$.

Esercizio 1.14 Una cassa di massa $m = 10\,kg$ si muove sopra una superficie orizzontale scabra e all'istante $t = 0$ il modulo della sua velocità è $|\vec{v}_0| = 3\,m/s$; il coefficiente di attrito dinamico tra la cassa e la superficie è $\mu_d = 0.2$. La cassa è soggetta, oltre che al suo peso e alla reazione della superficie, ad una forza verticale $\vec{f}$ che la spinge contro la superficie. Si calcoli lo spazio d percorso dalla cassa prima di fermarsi nei due casi seguenti:

a) l'intensità della forza $|\vec{f}|$ cresce linearmente col tempo, cioè $|\vec{f}(t)| = b\,t$ con $b = 100\,N/s$;

b) l'intensità $|\vec{f}|$ cresce proporzionalmente allo spazio x percorso dalla cassa a partire dall'istante $t = 0$, cioè $|\vec{f}(x)| = c\,x$ con $c = 12.5\,N/m$.

Esercizio 1.15 Due molle ideali di uguale costante elastica k sono disposte come in figura 8. Un corpo di massa m è posto tra le due molle ed è appoggiato su di un piano liscio ad una distanza

l dalle estremità fisse delle molle; esso è inizialmente fermo. La lunghezza a riposo della molla di sinistra è proprio pari a l mentre quella della molla di destra è pari a $l/2$.

Determinare:

a) il periodo delle oscillazioni del corpo;

b) la legge oraria del moto del corpo;

c) la massima velocità raggiunta nel moto e la posizione in cui tale velocità viene raggiunta.

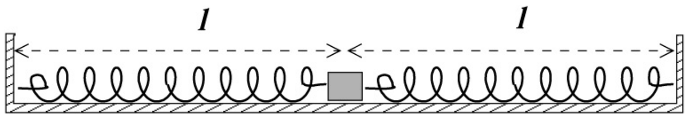

Figura 8: relativa all'esercizio **1.15**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $k = 7\,N/m$; $m = 450\,g$; $l = 48\,cm$.

Esercizio 1.16 ***(L'esercizio che segue ha un interesse particolare: esso può essere svolto in vari modi, man mano che si procede nello studio, alla luce dei nuovi concetti e dei principi generali di conservazione. Per ora bisogna scrivere e risolvere le due equazioni del moto.)***

Un blocchetto (puntiforme) di massa m si muove con velocità $\vec{v}_0$ su un piano orizzontale liscio (è trascurabile l'attrito). Da un certo istante in poi il blocco si viene a trovare (vedi la figura 9) sopra un blocco di massa M, inizialmente fermo, che a sua volta può scorrere su un piano orizzontale liscio. Tra i due blocchi c'è attrito e il coefficiente di attrito dinamico fra le superfici è μ_d. Il blocco di massa M ha una lunghezza molto maggiore di quella del blocchetto di massa m e sufficiente affinché quest'ultimo non cada. Determinare:

a) la velocità comune dei due blocchi, dopo che la loro velocità relativa si è annullata;

b) la lunghezza del percorso che il blocchetto di massa m compie sul blocco di massa M prima di fermarsi;

c) il tempo necessario perché questo avvenga.

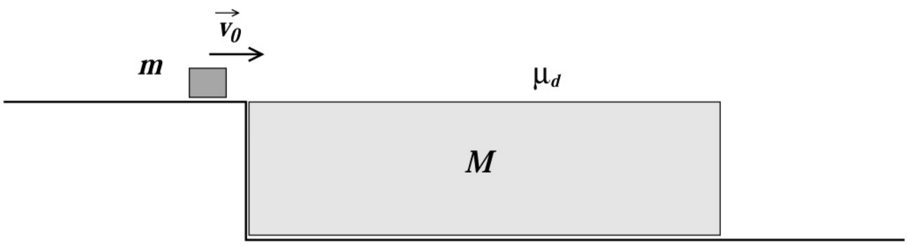

Figura 9: relativa all'esercizio **1.16**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 100\,g$; $|\vec{v}_0| = 1.5\,m/s$; $M = 500\,g$; $\mu_d = 0.15$.

Esercizio 1.17 Un blocco di massa m_1 è fermo, appoggiato su un piano orizzontale; c'è attrito tra le superfici e il coefficiente di attrito statico è μ_s. Un altro blocco di massa m_2 va incontro al primo, muovendosi sulla superficie del piano con coefficiente di attrito dinamico μ_d. Fra i due blocchi è interposta una molla ideale, di lunghezza a riposo l_0 e costante elastica k (vedi la figura 10 nella pagina successiva). All'istante $t = 0$ la distanza tra i due blocchi è pari a l_0 e il blocco m_2 ha una velocità di componente v_0. Determinare il massimo valore di v_0 per cui m_1 resta fermo e, in tali condizioni, determinare dopo quanto tempo il blocco m_2 si ferma e a che distanza da m_1.

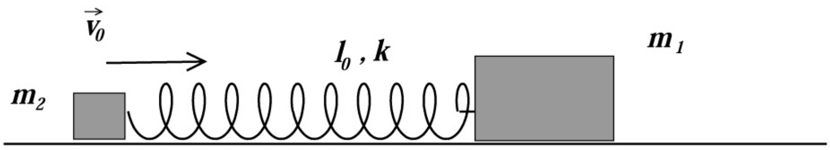

Figura 10: relativa all'esercizio **1.17**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m_1 = 10\,kg$; $\mu_s = 0.8$; $m_2 = 2\,kg$; $\mu_d = 0.3$; $l_0 = 1.4\,m$; $k = 70\,N/m$.

Esercizio 1.18 Un corpo di massa m è appeso ad un capo di una fune ideale di lunghezza L, che passa nella gola di una carrucola ideale e all'altro capo è fissata al pavimento (vedi la figura 11). Il perno centrale della carrucola è attaccato ad una estremità di una molla ideale, che ha lunghezza a riposo l_0 e costante elastica k; l'altra estremità della molla è attaccata al soffitto, che si trova ad una distanza h dal pavimento. Si badi bene che si può considerare il raggio della carrucola trascurabile rispetto alle altre lunghezze in gioco e che il corpo e la carrucola possono muoversi solamente lungo la direzione verticale.

a) Determinare la posizione di equilibrio del corpo.

b) Calcolare il periodo dell'oscillazione del corpo lungo la verticale (ammettendo, ovviamente, che l'ampiezza sia tale che non urti né contro il pavimento né contro la carrucola).

c) Si trovi inizialmente il corpo nella posizione di equilibrio e abbia una velocità $\vec{v}_0$ lungo la verticale e diretta verso il basso. Qual'è il valore massimo consentito per $|\vec{v}_0|$ affinché il corpo non urti contro il pavimento?

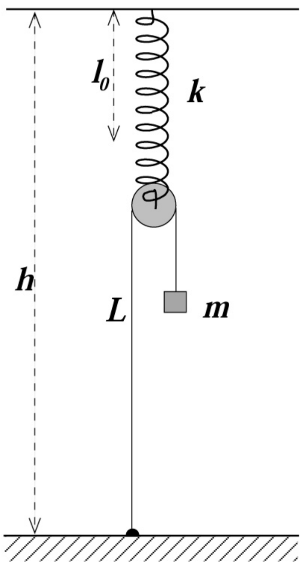

Figura 11: relativa all'esercizio **1.18**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 800\,g$; $L = \frac{3}{4}\,h$; $l_0 = \frac{1}{4}\,h$; $k = 30\,N/m$; $h = 2.6\,m$.

Esercizio 1.19 Nel sistema di figura 12, un cuneo di massa M, con una superficie superiore inclinata di un angolo α, poggia su un piano orizzontale ed è tenuto fermo da un rialzo; due blocchetti, di masse m_1 e m_2, sono collegati da un filo ideale, che passa nella gola di una puleggia perfettamente girevole e di massa trascurabile; la carrucola C è fissata all'estremità superiore del piano inclinato ed è dunque tutt'uno con esso.

a) Tra la superficie del piano inclinato e il blocchetto di massa m_2 l'attrito sia trascurabile. Si calcoli il valore minimo del coefficiente di attrito statico tra i blocchetti necessario affinché questi, lasciati liberi con velocità nulle nella posizione di figura, rimangano in quiete, e si calcolino in queste condizioni le due reazioni vincolari $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ sviluppate dal piano di appoggio e dal rialzo.

b) I coefficienti di attrito dinamico tra il blocchetto di massa m_2 e il piano inclinato e tra i due blocchetti siano diversi da zero e tutti aventi lo stesso valore μ_d. Il sistema venga lasciato libero nella posizione di figura con velocità iniziali nulle. Si calcolino la componente a dell'accelerazione del blocchetto m_2 lungo il piano inclinato e i valori delle due reazioni vincolari in questo caso.

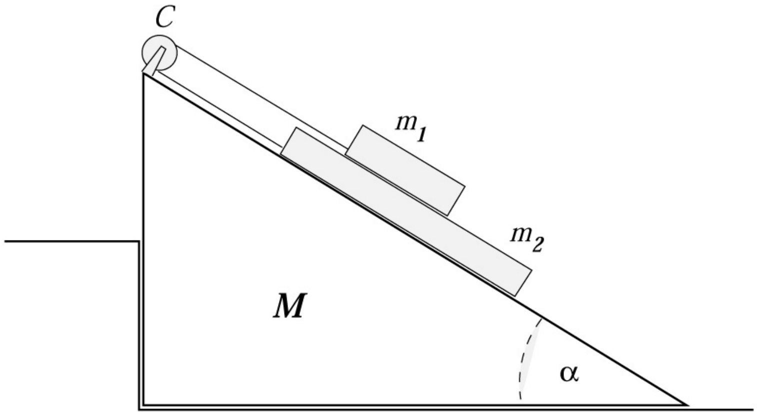

Figura 12: relativa all'esercizio **1.19**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 20\,kg$; $\alpha = 0.54\,rad$; $m_1 = 2000\,g$; $m_2 = 5000\,g$; $\mu_d = 0.1$.

Esercizio 1.20 Un blocco di massa M può scorrere senza attrito all'interno di una guida verticale ed è agganciato all'estremità superiore di una molla ideale di costante elastica k (l'estremità inferiore è fissata al pavimento - vedi la figura 13). Si consideri che all'istante iniziale il blocco è lasciato da fermo con la molla compressa di una quantità $\delta = -\Delta\ell$.

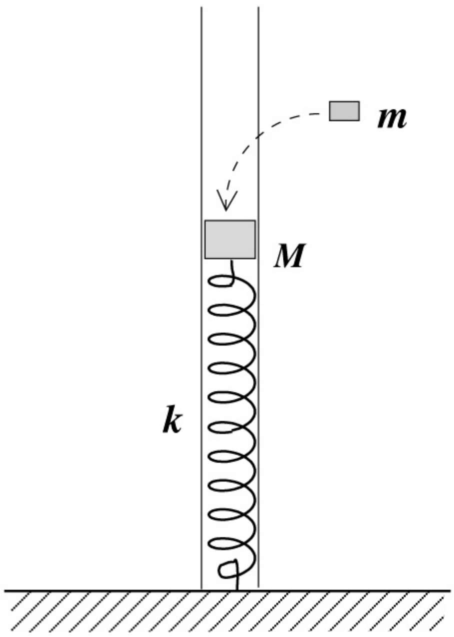

Figura 13: relativa all'esercizio **1.20**.

a) Si determini l'espressione della coordinata del centro dell'oscillazione e dell'ampiezza A del moto armonico successivo (e se ne calcoli il valore nel caso in cui $\delta = \delta_1$).

Sul blocco viene poggiato un secondo blocco di massa m e il sistema viene fatto partire da fermo dalla stessa posizione, con una compressione della molla data sempre da $\delta = -\Delta\ell$.

b) Si discuta innanzi tutto quello che può accadere, in funzione del valore del parametro δ, e si trovi quale sia la posizione dei due blocchi e il minimo valore di δ a partire dal quale il secondo blocco si distacca dal blocco di sotto (insieme al quale si era mosso fino a quell'istante). Quali saranno i due moti successivi al distacco?

c) Si determini l'espressione della quota massima, $h_{\max}$, a cui arriva il blocco di massa m, lanciato verso l'alto, e se ne calcoli il valore per $\delta = \delta_1$).

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 0.15\,kg$; $k = 7.0\,N/m$; $\delta_1 = 80\,cm$; $m = 0.050\,kg$.

1.3 Moti in 2 dimensioni: attrito viscoso, forza peso, tensione

Esercizio 1.21 Un pendolo semplice è costituito da un filo inestensibile e di massa trascurabile, vincolato ad una estremità ad un punto O nello spazio, e da un corpo puntiforme di massa m attaccato all'altra estremità del filo, la cui lunghezza risulti così l. Questo sistema è libero di muoversi nello spazio.

a) Sia trascurabile la resistenza (attrito viscoso) dell'aria e sia θ_0 $(= \Theta)$ l'angolo formato dal filo con la verticale passante per il punto O quando si lascia il corpo da fermo all'istante iniziale. Si discuta se il moto successivo si può considerare "di piccole oscillazioni" e se ne determino le caratteristiche cinematiche. In particolare si calcoli la velocità nel punto più basso e si determini l'espressione e l'andamento qualitativo della tensione del filo con l'angolo θ, con i suoi valori massimo e minimo.

b) Si consideri non trascurabile la resistenza dell'aria, con una espressione della forza come quella del punto **a)** dell'esercizio **1.22** seguente e con coefficiente b. Che cosa significa "isocronismo delle piccole oscillazioni" e quali sono le caratteristiche cinematiche del moto del pendolo nelle condizioni iniziali del punto precedente?

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 400\,g$; $l = 1.6\,m$; $\theta_0 = 14°$; $b = 0.02\,kg/s$.

Esercizio 1.22 Determinare le caratteristiche cinematiche del moto di un corpo puntiforme di massa m, in assenza di gravità, soggetto ai seguenti tipi di forze:

a) $-b\,\vec{v}$ (attrito viscoso proporzionale alla velocità) [in due dimensioni]

b) $-b\,v^2\hat{v}$ (attrito viscoso proporzionale al quadrato della velocità) [in una dimensione]

c) $\vec{F} - b\,\vec{v}$, in cui $\vec{F}$ è una forza uniforme e costante. [in due dimensioni]

Le condizioni iniziali sono $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ e $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Discutere anche gli andamenti asintotici.

Esercizio 1.23 Un fucile per la caccia subacquea lancia, mediante la compressione di una molla per un tratto Δl, una freccia di massa m (da considerarsi puntiforme). Sparando la freccia nell'aria orizzontalmente da un'altezza h, si osserva che essa cade al suolo a distanza d. Calcolare:

a) la velocità iniziale della freccia, all'uscita dalla canna del fucile, supponendo che l'aria non presenti attrito;

b) il coefficiente di elasticità, k, della molla del fucile.

Sparando invece la freccia nell'acqua, sempre orizzontalmente, si ipotizzi una forza resistente proporzionale alla velocità della freccia e con costante di proporzionalità b, e si calcoli:

c) la velocità limite raggiunta dalla freccia;

d) quanto il modulo della velocità differisce dalla velocità limite in percentuale dopo un intervallo di tempo uguale a 3 costanti di tempo.

APPLICAZIONE NUMERICA: $|\Delta l| = 40\,cm$; $m = 200\,g$; $h = 1.5\,m$; $d = 20\,m$; $b = 0.4\,kg/s$.

2 Equazione del moto (di Newton) in sistemi di riferimento non inerziali

Esercizio 2.1 Nel sistema di pulegge della figura 14 i valori delle masse sono $m_1 = 100\,g$, $m_2 = 200\,g$ e $m_3 = 300\,g$. Se si trascurano l'attrito e le masse dei fili e delle pulegge, qual è l'accelerazione del corpo di massa m_3?

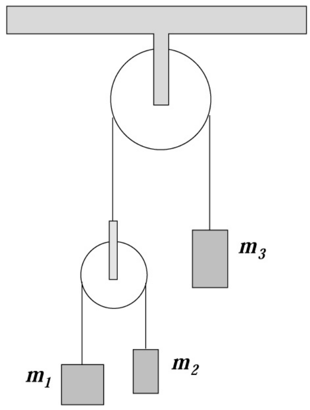

Figura 14: relativa all'esercizio **2.1**.

Esercizio 2.2 Un carrello si muove con accelerazione costante di modulo $|\vec{A}| = 2\,m/s^2$ sopra una superficie orizzontale; sul carrello si trova un piano inclinato, di inclinazione $\alpha = 35°$ e altezza $h = 2\,m$ (vedi la figura 15). Un corpo di massa $m = 10\,kg$ parte con velocità nulla (rispetto al carrello) dal culmine del piano inclinato e scivola lungo esso incontrando attrito trascurabile. Si calcoli la reazione $\vec{N}$ sviluppata dal piano inclinato e il tempo T impiegato dal corpo per giungere alla base del piano inclinato. Si studi, inoltre, la traiettoria del corpo nel sistema fisso del laboratorio facendo diverse ipotesi relativamente alla velocità del carrello nell'istante in cui esso parte.

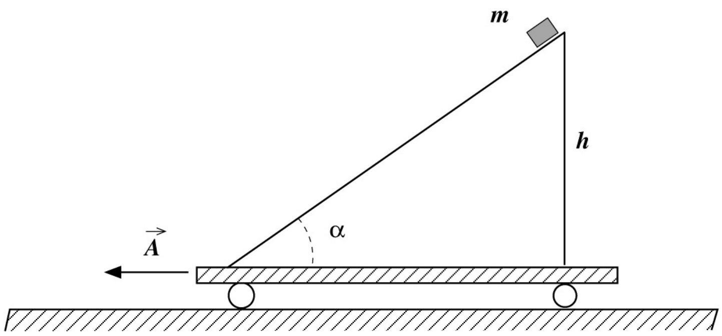

Figura 15: relativa all'esercizio **2.2**.

Esercizio 2.3 Nelle condizioni descritte nel problema precedente vi sia attrito tra il corpo e la superficie del piano inclinato con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.25$. Per quali valori del modulo $|\vec{A}|$ dell'accelerazione del carrello il corpo resta fermo sul piano inclinato?

Esercizio 2.4 Un cuneo di massa M può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, in modo che la sua faccia superiore, di lunghezza l, rimanga sempre orizzontale (vedi la figura 16).

Sulla faccia superiore è appoggiato un blocchetto puntiforme, di massa m, soggetto ad una forza di attrito radente. I due corpi sono inizialmente fermi e vengono poi lasciati cadere.

a) Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinché il blocchetto rimanga fermo sul cuneo.

b) Nel caso in cui l'attrito sia trascurabile, determinare la reazione normale $\vec{N}_1$ che il cuneo esercita sul blocchetto durante il moto e il tempo che impiega il blocchetto a percorrere l'intera faccia superiore del cuneo.

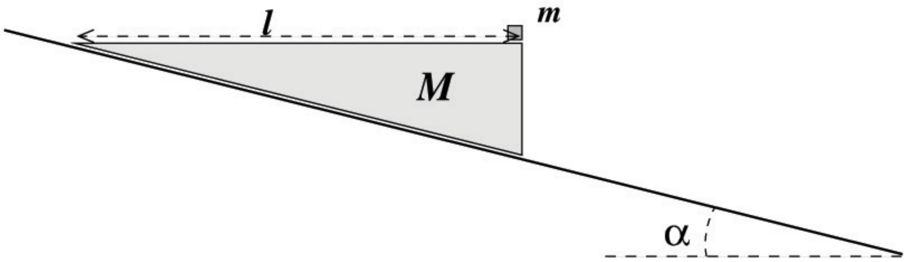

Figura 16: relativa all'esercizio **2.4**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $\alpha = 14°$; $M = 600\,g$; $m = 100\,g$; $l = 1.2\,m$.

Esercizio 2.5

La cabina di un ascensore di massa M può muoversi in direzione verticale, ed è trattenuta da un cavo sottoposto ad una tensione $\vec{\tau}$. All'interno di essa è fissato un pendolo costituito da una massa m sospesa a un filo, inestensibile e di massa trascurabile, di lunghezza l. Inizialmente la cabina è ferma ed il pendolo oscilla (le oscillazioni possono essere considerate piccole); se $|\vec{v}_0|$ è la velocità con la quale passa per la posizione verticale, si determini:

a) l'ampiezza, Θ, delle oscillazioni.

Ad un certo istante il pendolo si trova in posizione verticale, e l'ascensore viene trascinato dal cavo verso l'alto, con accelerazione costante $|\vec{a}|$. Determinare:

b) la nuova ampiezza delle oscillazioni.

[La domanda **c)** che segue può essere affrontata solo nel contesto della Dinamica dei Sistemi di Corpi, Unità **C**]

Appena il pendolo torna in posizione verticale l'ascensore smette di accelerare. Determinare:

c) il lavoro fatto sino a quel momento dalla tensione $\vec{\tau}$.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 150\,Kg$; $m = 200\,g$; $l = 1.2\,m$; $|\vec{v}_0| = 0.4\,m/s$; $|\vec{a}| = 0.8\,m/s^2$.

Esercizio 2.6

Un pendolo semplice, costituito da un filo ideale di lunghezza l e da un corpo puntiforme di massa m, è fissato al soffitto di un vagone fermo, posto su di un binario orizzontale e rettilineo, ed è fermo nella sua posizione di equilibrio. Ad un certo istante, il vagone inizia a muoversi con accelerazione costante: si osserva che, nel sistema solidale con il vagone, il pendolo compie delle oscillazioni di ampiezza Φ attorno alla sua nuova posizione di equilibrio, θ_E; la legge oraria si può scrivere $\theta(t) = \theta_E + \varphi(t)$.

a) Determinare il valore di θ_E e dell'accelerazione A del vagone se l'ampiezza delle oscillazioni è $\Phi = 7°$.

Nelle condizioni osservate ci si può fermare al 1° ordine negli sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche intorno all'angolo di equilibrio θ_E. In questa approssimazione, determinare:

b) l'equazione del moto del pendolo nel sistema del vagone (si trascuri la resistenza dell'aria) e la sua soluzione; calcolare inoltre il valore del periodo delle oscillazioni.

c) Nelle stesse ipotesi, calcolare la massima tensione $\tau_{\max}$ del filo durante il moto del pendolo.

APPLICAZIONE NUMERICA: $l = 1.60\,m$; $m = 400\,g$.

Esercizio 2.7 Un disco di grammofono (quelli che erano chiamati *LP* cioè "*long playing*") viene fatto girare, in un piano orizzontale, alla velocità angolare costante di 33 giri al minuto. Si osserva che se vi si depone una monetina questa vi rimane ferma (partecipando così alla rotazione del disco) solo se la sua distanza dall'asse di rotazione non supera i $10\,cm$. Calcolare il coefficiente di attrito statico.

Esercizio 2.8 Un corpo puntiforme di massa m si trova in quiete sopra la superficie liscia di un cono di semiapertura α sostenuto, come è mostrato nella figura 17, dal filo OA, inestensibile e di massa trascurabile e lunghezza l. A partire dall'istante $t = 0$ si esercita sopra il corpo una forza $\vec{F}$ costantemente tangente alla superficie conica e perpendicolare al filo che sostiene il corpo; la forza ha intensità $|\vec{F}|$ costante. Si determini come variano nel tempo la velocità angolare ω del corpo, la tensione τ del filo e il modulo $|\vec{N}|$ della reazione sviluppata dalla superficie, fino all'istante t^* in cui il corpo si distacca dalla superficie; si calcoli l'istante t^*.

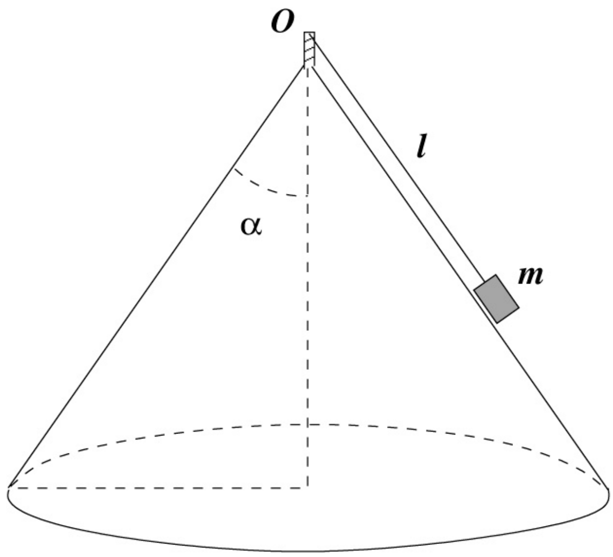

Figura 17: relativa all'esercizio **2.8**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 250\,g$; $\alpha = 35°$; $l = 1.4\,m$; $|\vec{F}| = 0.04\,N$.

Esercizio 2.9 ***(Esercizio-laboratorio)*** Una piattaforma circolare di raggio r viene mantenuta in rotazione, su un piano orizzontale, con una velocità angolare costante ω nel senso antiorario. L'asse di rotazione verticale passa per un perno centrale a cui è attaccato l'estremo di una molla ideale (costante elastica k e lunghezza a riposo l_0), la quale è adagiata in una scanalatura radiale ricavata sulla superficie della piattaforma. All'altro estremo della molla è agganciato un blocchetto praticamente puntiforme, di massa m, che può muoversi all'interno della scanalatura: l'attrito è trascurabile sia sulla base che sulle pareti verticali della scanalatura (vedi la figura 18 alla pagina successiva).

Studiare il moto del blocchetto nel sistema di riferimento solidale con la piattaforma, scrivendo l'equazione del moto e ricavando le espressioni del periodo dell'oscillazione e della posizione di equilibrio stabile, discutendone i valori sulla base dei parametri da cui dipendono. Scegliendo poi possibili valori delle condizioni iniziali, scrivere la legge oraria del moto con relativa ampiezza e fase iniziale. Trovare poi l'espressione della reazione vincolare $\vec{N}$ della parete laterale della scanalatura. Porsi infine domande su quello che si può fare in presenza di eventuali attriti.

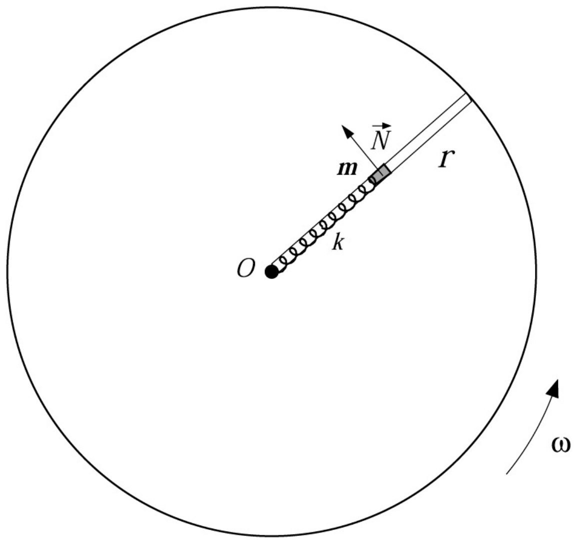

Figura 18: relativa all'esercizio **2.9**.

Esercizio 2.10

Un'asta ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale col quale forma costantemente un angolo α (vedi la figura 19); lungo l'asta può scorrere con attrito trascurabile un manicotto di massa m trattenuto da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0.

a) Si determini il valore ω_1 di ω per il quale il manicotto è in condizioni di equilibrio con la molla allungata di un tratto δ.

b) Con $\omega = \omega_1$ si lasci il manicotto libero di muoversi con velocità iniziale nulla a partire dalla posizione in cui la molla è compressa di un tratto δ; si calcoli l'allungamento massimo $\delta_{\max}$ raggiunto dalla molla e il periodo T delle oscillazioni compiute dal manicotto lungo l'asta.

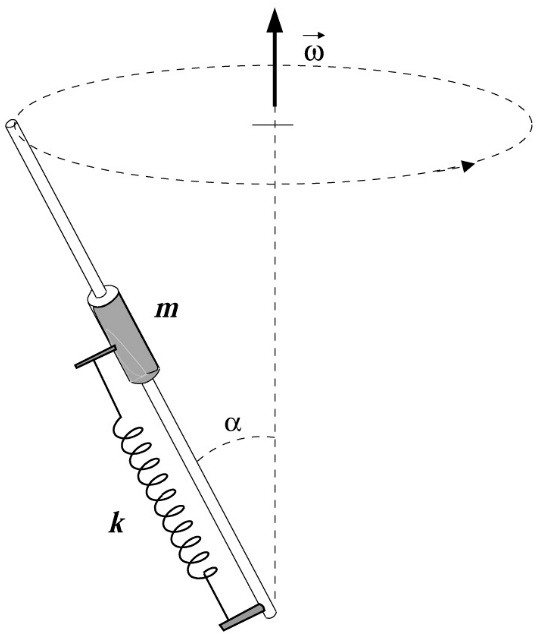

Figura 19: relativa all'esercizio **2.10**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $\alpha = 28°$; $m = 200\,g$; $k = 20\,N/m$; $l_0 = 60\,cm$; $\delta = 8\,cm$.

3 Lavoro ed energia cinetica

Esercizio 3.1 Un corpo di massa $m = 0.05\,kg$, inizialmente in quiete, a partire dall'istante $t = 0$ è soggetto ad una forza $\vec{F}(t)$ variabile nel tempo secondo la legge $\vec{F}(t) = \vec{c}\,t$, essendo $\vec{c}$ un vettore uniforme e costante di modulo $|\vec{c}| = 0.0025\,N/s$. Si calcoli la quantità di moto $\vec{q}(t)$ posseduta dal corpo all'istante generico t e il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forza dall'istante iniziale fino a quello $t_1 = 2\,s$.

Esercizio 3.2 Un serbatoio cilindrico di altezza h contiene acqua fino a metà della sua altezza. Se si vuole pompare quest'acqua oltre il bordo del serbatoio e la massa totale dell'acqua è m, che lavoro deve compiere la pompa?

Esercizio 3.3 Il conducente di un'auto frena bruscamente e i pneumatici si bloccano slittando sull'asfalto, in un tratto orizzontale della strada. Viene rilevata dalla polizia stradale una traccia sul terreno, corrispondente alla distanza di frenata, di lunghezza $l = 24\,m$. Assumendo un coefficiente di attrito dinamico dei pneumatici rispetto all'asfalto $\mu_d = 0.85$, calcolare la velocità dell'auto al momento della frenata.

Esercizio 3.4 Un corpo di massa $m = 0.4\,kg$ e velocità iniziale di modulo $|\vec{v}_0| = 10\,m/s$ viene soggetto per un intervallo di tempo T all'azione di una forza uniforme e costante perpendicolare a $\vec{v}_0$: la direzione finale di moto del corpo risulta deviata di $\pi/4\,rad$ rispetto a quella iniziale. Si calcoli il modulo $|\vec{v}|$ della velocità finale $\vec{v}$ del corpo e il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forza nell'intervallo di tempo T.

Esercizio 3.5 Un cubetto assimilabile ad un punto materiale è vincolato a scorrere lungo una guida fissa ABC costituita da due tratti rettilinei AB e BC, di ugual lunghezza l e di uguale inclinazione α rispetto all'orizzontale, giacenti nello stesso piano verticale e rigidamente uniti in B mediante un raccordo curvo di lunghezza trascurabile (vedi la figura 20). Il coefficiente di attrito dinamico fra il cubetto e la guida, praticamente uguale al coefficiente di attrito statico, è μ. Il cubetto è abbandonato in quiete nella posizione A; calcolare la lunghezza complessiva del percorso compiuto durante tutto il moto successivo.

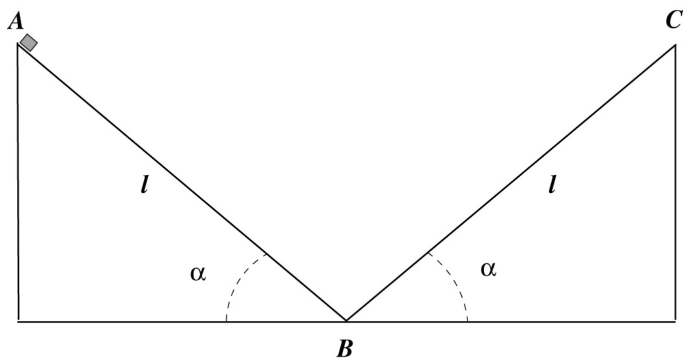

Figura 20: relativa all'esercizio **3.5**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $l = 2.3\,m$; $\alpha = 40°$; $\mu = 0.04$.

Esercizio 3.6 Un corpo puntiforme di massa m è vincolato a muoversi lungo una guida ABC (vedi la figura 21) costituita da due tratti: il tratto AB ha la forma di un quarto di circonferenza, di raggio r, giacente in un piano verticale; il tratto BC è rettilineo, orizzontale, e tangente all'arco AB nel punto B. Nel tratto AB, con opportuni artifici, è stato praticamente eliminato l'attrito;

nel tratto BC, invece, c'è attrito e il coefficiente di attrito dinamico è μ. Inizialmente si abbandona il corpo in quiete nella posizione A. In quale posizione arriverà a fermarsi alla fine del moto?

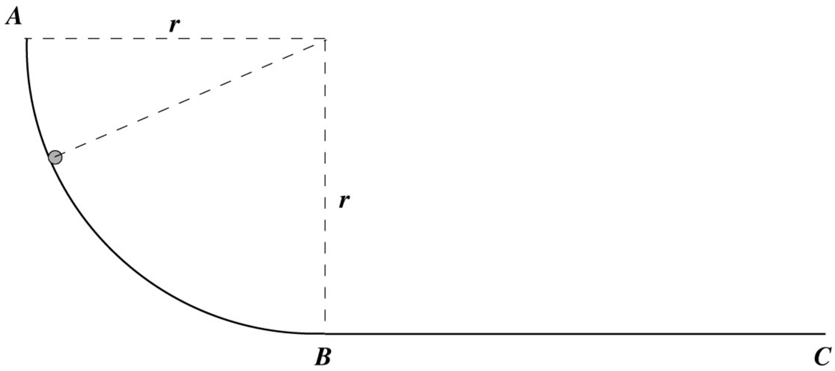

Figura 21: relativa all'esercizio **3.6**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $r = 70\,cm$; $\mu = 0.25$.

Esercizio 3.7 Nella situazione riprodotta in figura 22, la cassa di massa m, ad un certo istante, ha velocità $\vec{v}_0$ diretta lungo l'asse di una molla ideale di costante elastica k e la molla non è né compressa né allungata. Tra la cassa e la superficie orizzontale di appoggio c'è attrito con coefficienti di attrito statico e dinamico μ_s e μ_d, rispettivamente. Si determini la relazione che deve esistere tra $|\vec{v}_0|$ e le grandezze m, k, μ_s e μ_d affinché la cassa rimanga ferma nella posizione corrispondente al massimo allungamento della molla.

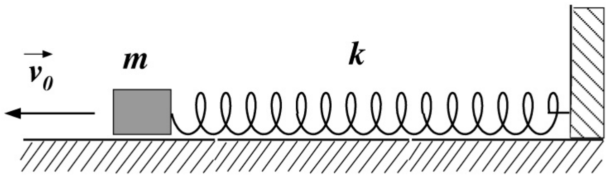

Figura 22: relativa all'esercizio **3.7**.

Esercizio 3.8 Un blocco di massa $M = 8\,kg$ può scivolare su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.3$ e di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Ad un certo istante il blocco comincia ad essere lentamente tirato da un motore, attraverso un filo inestensibile (e di massa trascurabile) ed una molla ideale di lunghezza a riposo l_0 e di costante elastica $k = 40.0\,N/m$; in questo stesso istante filo e molla sono già distesi (vedi la figura 23); la molla comincia ad allungarsi, ma il blocco è ancora fermo per via dell'attrito statico. All'istante $t = 0$ in cui il blocco comincia a muoversi il motore viene spento e bloccato. Determinare:

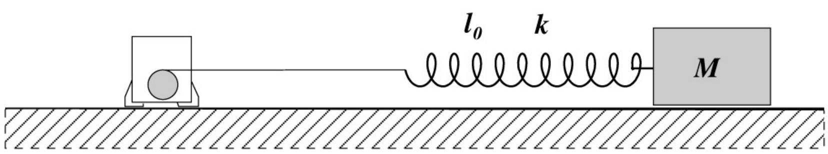

Figura 23: relativa all'esercizio **3.8**.

a) lo spazio percorso dal blocco prima di fermarsi;

b) la durata del moto.

Esercizio 3.9 Una cassa di massa $m = 10\,kg$ si trova in quiete sopra il piano di un carrello di massa $M = 90\,kg$ in moto su una superficie orizzontale con velocità costante di modulo $|\vec{v}_0|$; tra la cassa e il piano del carrello vi è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.45$. Il carrello va ad urtare l'estremità libera di una molla avente l'asse diretto secondo la direzione di moto del carrello (vedi la figura 24): la costante elastica della molla è $k = 900\,N/m$. Qual è il valore massimo $v_{\max}$ che $|\vec{v}_0|$ può avere se la cassa non deve scivolare lungo il piano del carrello?

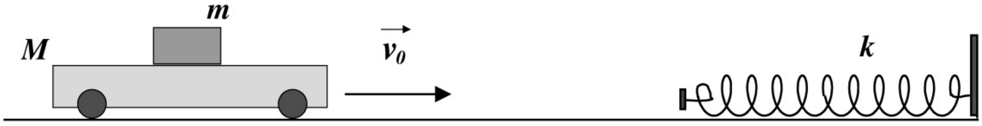

Figura 24: relativa all'esercizio **3.9**.

Esercizio 3.10 Il cavo di un ascensore di massa m si rompe improvvisamente quando esso è fermo ad altezza h_1 dal suolo (vedi la figura 25). Il sistema di sicurezza entra immediatamente in funzione applicando una forza d'attrito costante $\vec{F}_a$. Nel pozzo dell'ascensore c'è una grossa molla di ammortizzazione di costante elastica k. L'estremità superiore della molla si trova ad una quota h_2 rispetto al suolo. Calcolare (considerando che i freni siano sempre in funzione nelle tre fasi prese in considerazione):

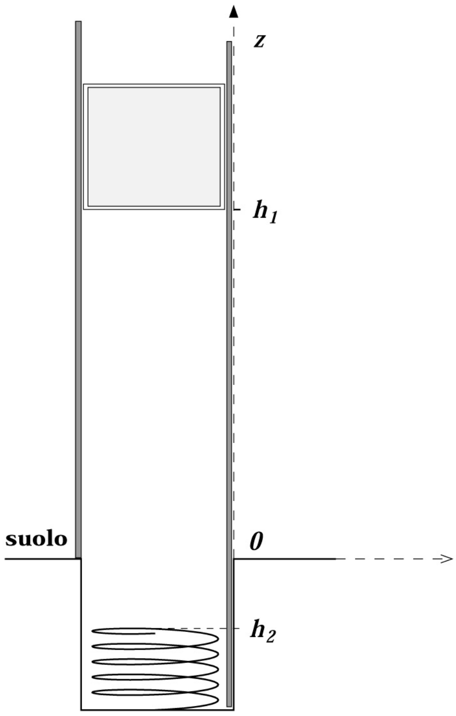

Figura 25: relativa all'esercizio **3.10**.

a) la velocità con cui l'ascensore urta la molla;

b) la massima compressione della molla;

c) l'altezza massima h_3 raggiunta dall'ascensore dopo aver rimbalzato sull'ammortizzatore.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 150\,kg$; $h_1 = 7\,m$; $|\vec{F}_a| = 900\,N$; $k = 24000\,N/m$; $h_2 = -3\,m$.

Esercizio 3.11 Il peso di un corpo si identifica, se si prescinde dal contributo della forza centrifuga che qui, per semplicità, vogliamo trascurare, con la forza di gravitazione universale esercitata su di esso dalla massa terrestre; pertanto, assimilando la terra ad una sfera di raggio $R_T \simeq 6380\,km$ e considerando la massa terrestre concentrata nel suo centro (è lecito ciò e in quali condizioni?), risulta che il peso di qualunque corpo (e, parallelamente, l'accelerazione di gravità g) diminuisce, innalzandosi sopra il livello del mare, in maniera inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro della terra.

Detta h un'altezza generica sopra il livello del mare e considerando $g_0 = 9.8\,m/s^2$ l'accelerazione di gravità al livello del mare, si calcoli il valore di $g(h)$ per un'altezza h generica e in particolare:

a) per $h = 1\,km$; **b)** per $h = 100\,km$; **c)** per $h = R_T$.

Successivamente si calcoli, con l'approssimazione dell'$\frac{1}{1000}$, il lavoro che occorre compiere per innalzare verticalmente un corpo di massa $m = 10\,kg$ alle tre altezze indicate in a), b) e c).

Esercizio 3.12

Un corpo puntiforme di massa $m = 2\,kg$ si trova all'interno di una conca di forma semisferica e di raggio $r = 0.5\,m$; l'attrito tra il corpo e la superficie della conca è trascurabile.

a) Si calcoli in funzione dell'angolo θ (vedi la figura 26; il verso positivo è quello antiorario) il modulo della forza $\vec{f}$ tangente alla conca che si deve applicare al corpo affinché questo resti fermo oppure si muova con velocità scalare costante.

b) Si varia l'intensità della forza $\vec{f}$ e il corpo scende lungo la conca partendo con velocità nulla dalla posizione $\theta_0 = -\pi/2\,rad$; quando il corpo passa per la posizione $\theta = 0$ la sua velocità ha modulo $|\vec{v}_f| = 2\,m/s$; si calcoli il lavoro $\mathcal{L}_f$ fatto corrispondentemente dalla forza $\vec{f}$.

c) Si calcoli il modulo della reazione vincolare $\vec{N}$ sviluppata dalla conca al passaggio del corpo nella posizione $\theta = 0$.

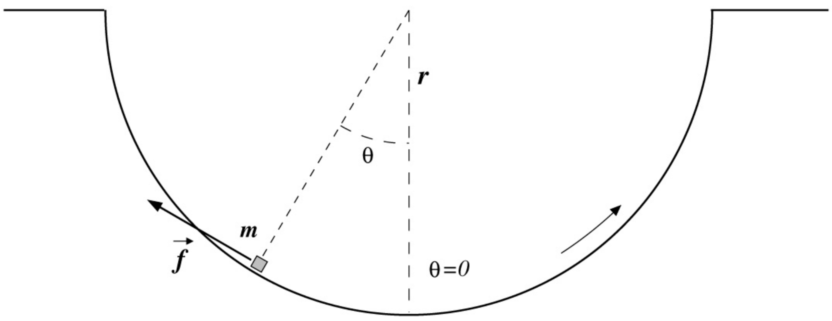

Figura 26: relativa all'esercizio **3.12**.

Esercizio 3.13

Un corpo di dimensioni trascurabili e massa m si trova inizialmente nel punto più basso all'interno di una guida circolare di raggio r (si consideri trascurabile l'attrito tra il corpo e la superficie interna della guida e si indichi con θ l'angolo tra la verticale orientata verso il basso e il raggio passante per la posizione del corpo, con orientamento positivo nel verso antiorario - vedi la figura 27 nella pagina successiva). Si calcoli:

a) la velocità tangenziale minima $v_{\min}$ che deve essere impressa al corpo affinché questo descriva in un piano verticale un giro completo della guida senza staccarsi dalla sua parete;

b) il modulo della reazione vincolare $\vec{N}$ nei vari punti della traiettoria circolare se la velocità tangenziale iniziale è $\frac{3}{4}\,v_{\min}$. In quale punto il corpo si distaccherà dalla superficie della guida?

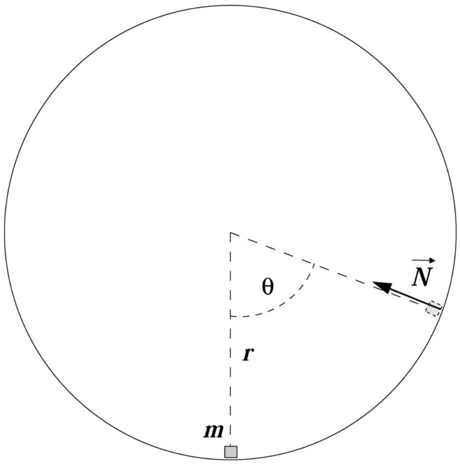

Figura 27: relativa all'esercizio **3.13**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 150\,g$; $r = 80\,cm$

Esercizio 3.14 Nel dispositivo mostrato nella figura 28 il corpo di massa M è appoggiato su un piano orizzontale scabro: il coefficiente di attrito statico relativo al contatto tra corpo e piano è μ_s. Un filo inestensibile e di massa trascurabile collega il corpo ad una pallina di massa m, sospesa nel vuoto. La carrucola C ruota senza attrito ed ha massa trascurabile. Calcolare il massimo valore dell'ampiezza di oscillazione della pallina che non produce lo spostamento del corpo di massa M.

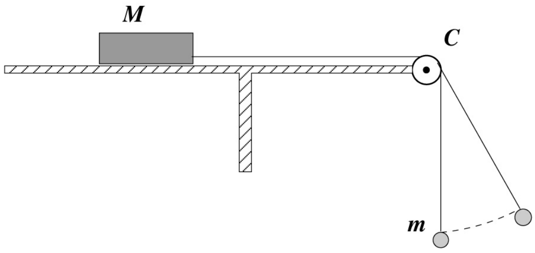

Figura 28: relativa all'esercizio **3.14**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 800\,g$; $\mu_s = 0.5$; $m = 300\,g$.

Esercizio 3.15 Il pendolo semplice mostrato in figura 29 è costituito da una pallina di massa m appesa ad un filo ideale di lunghezza l, fisso in A; nel punto O lungo la verticale, a distanza $l/2$ da A, è fissato un chiodo. La pallina, inizialmente ferma in B, con il filo teso orizzontalmente, viene lasciata libera di cadere.

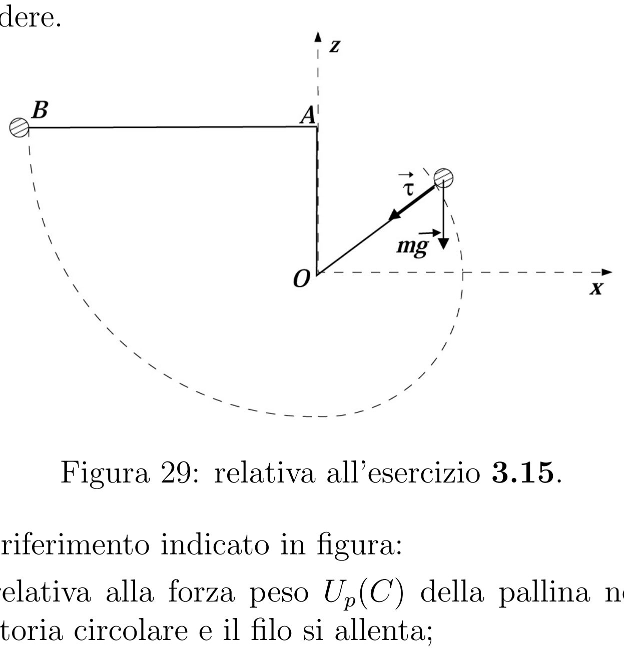

Figura 29: relativa all'esercizio **3.15**.

Trovare, nel sistema di riferimento indicato in figura:

a) l'energia potenziale relativa alla forza peso $U_p(C)$ della pallina nel punto C in cui essa si distacca dalla traiettoria circolare e il filo si allenta;

b) la velocità vettoriale in C;

c) dopo quanto tempo, a partire da C, torna ad agire la tensione del filo.

Esercizio 3.16 Un carrello si muove con accelerazione costante $\vec{A}$ e la sua superficie superiore, piana e orizzontale, ha lunghezza L (vedi la figura 30). Sull'estremità destra di tale superficie è posta una molla ideale (di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0), compressa di un tratto δ. All'estremità libera della molla e sul carrello è appoggiato un blocchetto (praticamente puntiforme) di massa m. Tra il blocchetto e la superficie superiore del carrello c'è attrito, con coefficiente di attrito dinamico μ_d. All'istante iniziale si fa scattare la molla e il blocchetto parte (mentre l'accelerazione del carrello è mantenuta costante).

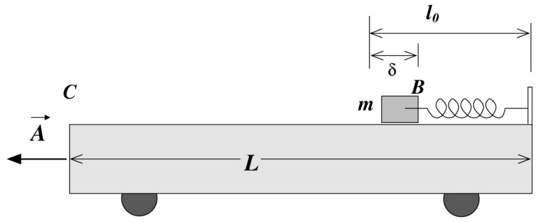

Figura 30: relativa all'esercizio **3.16**.

Calcolare il modulo dell'accelerazione del carrello, $|\vec{A}|$, per cui il blocchetto, partendo da B, arrivi in C con velocità nulla e calcolare il tempo impiegato. Resta fermo il blocchetto nel punto C?

APPLICAZIONE NUMERICA: $\delta = 50\,cm$; $k = 120\,N/m$; $l_0 = 90\,cm$; $m = 300\,g$; $\mu_d = 0.3$; $L = 10.4\,m$.

Esercizio 3.17 Una piattaforma circolare di raggio r viene mantenuta in rotazione, su un piano orizzontale, con una velocità angolare costante ω nel senso antiorario. Lungo un diametro è ricavata una scanalatura nella quale si può muovere un blocchetto di massa m (che si può considerare puntiforme). C'è attrito solo sul fondo della scanalatura (mentre è del tutto trascurabile sulle pareti) e i coefficienti di attrito sono μ_s e μ_d (vedi la figura 31).

Il blocchetto si trova inizialmente ad una estremità della scanalatura ed ha una velocità $\vec{v}_0$ (rivolta verso il centro) relativamente alla piattaforma. Si osserva che il blocchetto ha una velocità sufficiente per superare il centro e si ferma prima di raggiungere l'altra estremità della scanalatura. Controllare che sia così nell'applicazione numerica proposta, determinando la velocità che possiede nel centro e la posizione in cui si ferma e verificando che effettivamente possa rimanere fermo.

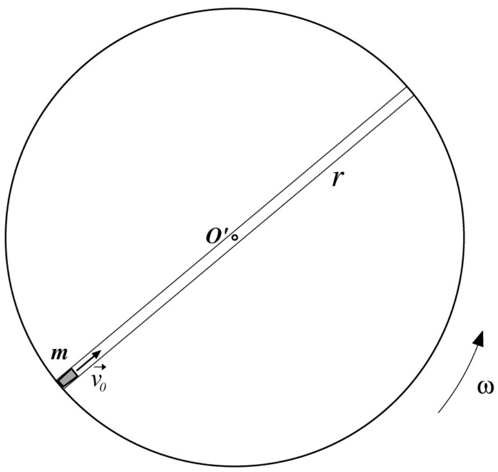

Figura 31: relativa all'esercizio **3.17**.

APPLICAZIONE NUMERICA: usare 2 cifre significative per g: $9.8\,m/s^2$; $r = 66\,cm$; $\omega = 2.0\,s^{-1}$; $\mu_s = 0.22$; $\mu_d = 0.20$; $|\vec{v}_0| = 2.3\,m/s$.

Esercizio 3.18 ***(Anche questo esercizio è molto importante e qui va svolto scrivendo e risolvendo le due equazioni del moto; successivamente, alla luce dei nuovi concetti della "dinamica dei sistemi" e dei principi generali di conservazione, si dovrà svolgere molto utilmente in maniera diversa.)***

Un piano inclinato di massa M e lunghezza della superficie superiore l (angolo di inclinazione α) è libero di muoversi su di un piano orizzontale senza attrito. Su di esso è poggiato un blocchetto puntiforme di massa m (vedi la figura 32). Il coefficiente d'attrito dinamico tra blocchetto e superficie del piano inclinato è μ_d. Il sistema viene lasciato libero nella posizione in figura con velocità iniziali nulle.

a) Calcolare la componente della velocità V del piano inclinato, nel riferimento fisso, e la componente della velocità relativa del blocchetto lungo il profilo del piano inclinato, nel riferimento solidale con questo, nell'istante in cui il blocchetto ha percorso un tratto $l/2$ sul piano inclinato.

b) Determinare il minimo coefficiente d'attrito statico tra piano inclinato e piano orizzontale di appoggio affinché, a partire dalle stesse condizioni iniziali, il piano inclinato rimanga fermo.

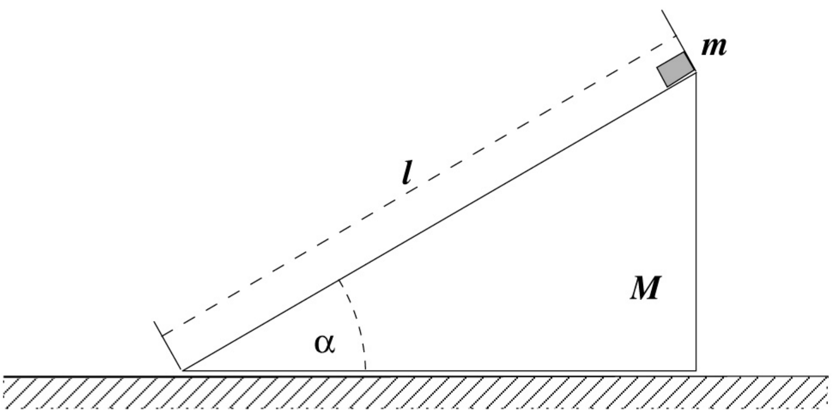

Figura 32: relativa all'esercizio **3.18**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 2000\,g$; $l = 2\,m$; $\alpha = 30°$; $m = 200\,g$; $\mu_d = 0.2$.

Esercizio 3.19 Un'asta di lunghezza $l = 2\,m$ ha un'estremità incernierata ad un asse verticale attorno al quale viene mantenuta in rotazione con velocità angolare costante ω; l'angolo tra l'asta e l'asse ha valore costante $\alpha = \pi/6\,rad$. Un manicotto (che ai fini dell'esercizio può essere considerato di lunghezza trascurabile) di massa m, inizialmente fermo nel punto di mezzo dell'asta, viene lasciato libero di scorrere lungo l'asta (vedi la figura 33 alla pagina successiva).

a) C'è attrito tra manicotto e asta e il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.13$. Si determinino i valori entro i quali deve essere compresa ω affinché il manicotto non si muova lungo l'asta.

b) Considerando invece le forze di attrito trascurabili, si calcoli il modulo $|\vec{v}_{\text{ass}}|$ della velocità rispetto a terra posseduta dal manicotto nell'istante in cui fugge dall'asta se $\omega = \omega_1 = 7.5\,rad/s$.

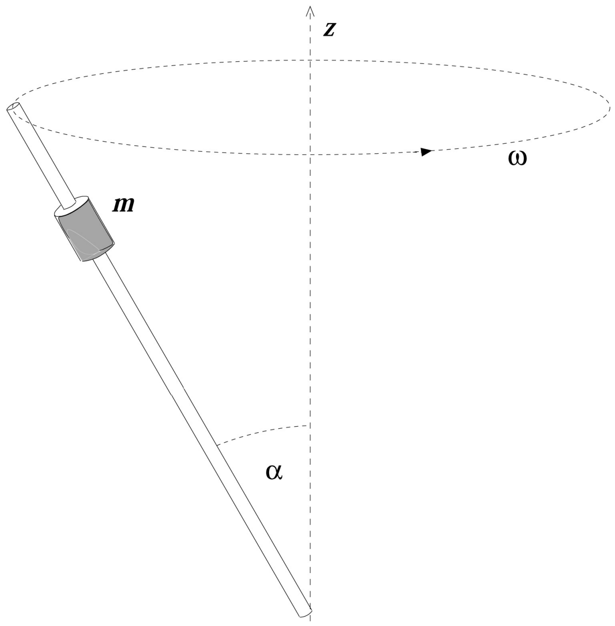

Figura 33: relativa all'esercizio **3.19**.

Esercizio 3.20 Un satellite artificiale di massa $m = 200\,kg$, in rotazione attorno alla terra su un'orbita circolare a distanza $d = 500\,km$ dal suolo, viene spostato su un'altra orbita circolare a distanza $2\,d$ dal suolo. Si calcoli il lavoro $\mathcal{L}$ necessario per effettuare questo spostamento.

(Dati: costante di gravitazione universale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,N\,m^2/kg^2$, raggio medio della terra $r_T = 6380\,km$, densità media della terra $\rho_T = 5520\,kg/m^3$.)

4 Momento della quantità di moto

Esercizio 4.1 Un satellite in orbita circolare intorno alla terra (vedi la figura 34), in un punto A riduce istantaneamente del $90\,\%$ la sua velocità. Se il raggio dell'orbita era $R_A = 1 \cdot 10^4\,km$ e il raggio terrestre medio è $R_T \simeq 6.4 \cdot 10^3\,km$, trascurando la resistenza dell'aria,

a) verificare che il satellite cade sulla terra;

b) calcolare la velocità del satellite nel punto di impatto I, posto che sia $G \simeq 6.7 \cdot 10^{-11}\,N\,m^2/kg^2$ e $M_T \simeq 6 \cdot 10^{24}\,kg$.

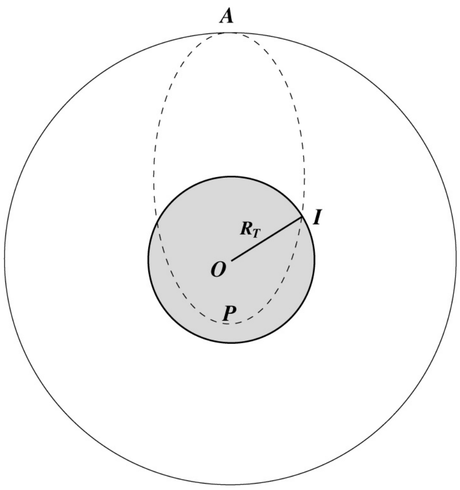

Figura 34: relativa all'esercizio **4.1**.

Esercizio 4.2 Un meteorite, ad un certo istante, si trova sulla verticale sopra il polo Nord, ad un'altezza $h = 100\,km$ dalla superficie terrestre, ed ha velocità di modulo $|\vec{v}_0| = 150\,m/s$ e di direzione perpendicolare alla retta congiungente con il centro della terra (che è supposta sferica). Nell'ipotesi che il meteorite si possa considerare un punto materiale e che si possa trascurare l'attrito con l'atmosfera, calcolare l'angolo d'impatto α del meteorite sulla superficie terrestre (vedi la figura 35).

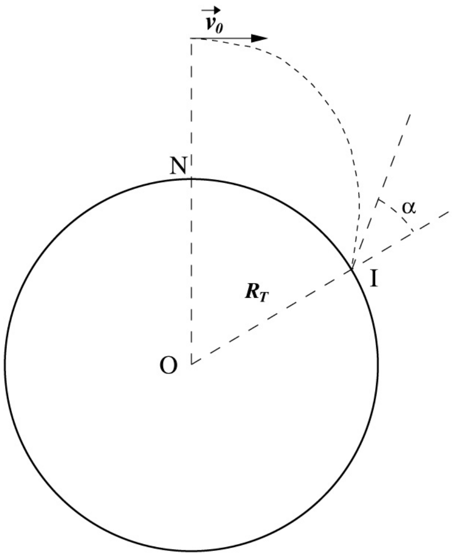

Figura 35: relativa all'esercizio **4.2**.

(DATI: $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}\,kg$; $R_T = 6380\,km$; $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,N\,m^2/kg^2$)

Esercizio 4.3 ***(Pendolo sferico)*** Un'asta di lunghezza l e massa trascurabile ha un estremo incernierato in un punto di un asse verticale; all'altro estremo è attaccato un corpo puntiforme di massa m. All'asta, portata in posizione orizzontale, viene impressa una velocità angolare ω_0 intorno all'asse verticale. Si determini l'angolo θ^* che l'asta forma con l'asse verticale nella posizione più bassa raggiunta dal corpo, supponendo trascurabili gli attriti.

Esercizio 4.4 Un corpo celeste, assimilabile ad un punto materiale di massa m, si muove nel campo gravitazionale generato da una grande massa M, anch'essa assimilabile ad un punto materiale e posta nell'origine di un sistema di riferimento O–xyz. In un certo istante, il vettore posizione e il vettore velocità del corpo di massa m sono dati da:

$$\vec{r}_0 = \left(\frac{3\,GM}{10\,u^2},\ \frac{4\,GM}{10\,u^2},\ 0\right) \qquad ; \qquad \vec{v}_0 = \left(-u,\ \frac{u}{2},\ 0\right)$$

dove u è una quantità positiva nota e G è la costante di gravitazione universale.
Determinare:

a) il momento angolare $\vec{L}_O$ del corpo di massa m rispetto ad O;

b) la velocità areolare $\frac{dS}{dt}$ del corpo di massa m e la sua energia meccanica E;

c) la distanza minima e massima del corpo da O e le corrispondenti velocità.

RISPOSTE "Unità B"

1.1 – $t_f = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ $\quad v_f = \sqrt{2hg}$ $\quad$ [Il risultato, comunque, non dipende da m; rispetto alla caduta libera, la velocità è la stessa ma il tempo è sempre più lungo con il diminuire di α.]

1.2 – $t_{\min} = 0.27\,s \qquad h_{\min} = 0.18\,m$

1.3 – **a)** $\left|\vec{F}\right| = 392\,N \qquad \left|\vec{R}\right| = 784\,N$ $\qquad$ **b)** come a)

c) $\left|\vec{F}\right| = 431\,N \qquad \left|\vec{R}\right| = 862\,N$

1.4 – $|\vec{\tau}| = 4\,N$

1.5 – **a)** $|\vec{a}| = \dfrac{m_B - m_A}{m_B + m_A}\,g \qquad |\vec{\tau}| = \dfrac{2m_A m_B}{m_B + m_A}\,g \qquad \left|\vec{R}\right| = 2|\vec{\tau}|$

b) $|\vec{a}| = \dfrac{m_B - (m_{A_1} + m_{A_2})}{m_B + m_{A_1} + m_{A_2}}\,g \qquad |\vec{\tau}_1| = \dfrac{2m_B(m_{A_1} + m_{A_2})}{m_B + m_{A_1} + m_{A_2}}\,g$

$|\vec{\tau}_2| = \dfrac{2m_B m_{A_2}}{m_B + m_{A_1} + m_{A_2}}\,g \qquad \left|\vec{R}\right| = 2|\vec{\tau}_1|$

c) $|\vec{a}| = \dfrac{m_B - m_{A_1}}{m_B + m_{A_1} + m_{A_2}}\,g \qquad |\vec{\tau}_1| = \dfrac{m_B(2m_{A_1} + m_{A_2})}{m_B + m_{A_1} + m_{A_2}}\,g$

$|\vec{\tau}_2| = m_{A_2}|\vec{a}| \qquad \left|\vec{R}\right| = 2|\vec{\tau}_1|$

1.6 – $|\vec{a}_C| = 1.96\,m/s^2 \qquad |\vec{\tau}_{AB}| = 0.78\,N$

1.7 – $\tan\alpha > \mu_s \qquad t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)}} \qquad v_1 = \sqrt{2hg\dfrac{\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

1.8 – $T = 2.63\,s \qquad \delta_{\max} = 27.2\,cm$

1.9 – Periodo: $T = 1.26\,s$ $\qquad$ Ampiezza: $A = 49.4\,cm$ $\qquad$ Fase: $\varphi_0 = 52.6°$

1.10 – $\Delta s_{\text{tot}} = 65.6\,cm$

1.11 – $|\vec{v}|_{\max} = 5.0\,m/s \qquad \Delta s_{\text{tot}} = 8.4\,m$

1.12 – **a)** $\alpha = 31.0°$

b) $h_{\max} = 12.7\,cm \qquad t_1 = 0.248\,s$

c) $\tan\alpha' = 0.277 < \mu_s \qquad h'_{\max} = 8.87\,cm$

1.13 – $a_{(\text{versodestra})} = 0.75\,m\,s^{-2} \qquad |\vec{\tau}| = 1.15\,N$

1.14 – **a)** $d = 1.69\,m$ $\qquad$ **b)** $d = 2.03\,m$

1.15 – **a)** $T = 1.13\,s$ $\qquad$ **b)** (origine O nel punto iniziale) $x(t) = \dfrac{l}{4}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\;t\right)\right)$

c) $v_{\max} = 0.67\,m/s$ $\quad$ in $\;x_c = 0.12\,cm$

1.16 – **a)** $|\vec{v}_f| = 0.25\,m/s$ $\qquad$ **b)** $l = 63.8\,cm$ $\qquad$ **c)** $t^* = 0.85\,s$

1.17 – $v_{0_{\max}} = 7.1\,m/s \qquad t_f = 0.25\,s \qquad d_{2,1}(t_f) = 28\,cm$

1.18 – **a)** z_c (quota dal pavimento) $= 90.36\,cm$ $\qquad$ **b)** $T = 2.05\,s$ $\qquad$ **c)** $|\vec{v}_0|_{\max} = 2.77\,m/s$

1.19 – **a)** $\mu_{s_{\min}} = 0.45 \qquad \left|\vec{N}_1\right| = 264.6\,N \qquad \left|\vec{N}_2\right| = 0$

b) $a = 0.84\,m/s^2 \qquad \left|\vec{N}_1\right| = 263.3\,N \qquad \left|\vec{N}_2\right| = 2.16\,N$

1.20 – **a)** z_c (avendo scelto come origine la posizione dell'estremo libero quando la molla è a riposo) $=$

$= -\dfrac{Mg}{k} = -21\,cm \qquad A = |-\delta - z_c| = 59\,cm$ $\qquad$ **b)** $z_c = -\dfrac{M+m}{k}\,g = -28\,cm$

se $\delta < \dfrac{M+m}{k}\,g$ $\;$ oppure $\;\dfrac{M+m}{k}\,g < \delta \leq 2\,\dfrac{M+m}{k}\,g \quad : \qquad A = |-\delta - z_c|$

se $\delta > 2\,\dfrac{M+m}{k}\,g \qquad N = 0$ quando $z = 0$

c) $h_{\max} = \delta\,\left(\dfrac{\delta\,k}{2g(M+m)} - 1\right) = 34.2\,cm$

1.21 – **a)** $T = 2.5\,s \qquad s(t) = l\theta(t) = l\Theta\cos(\Omega t) \qquad v(t) = -\Theta\sqrt{lg}\,\sin(\Omega t) \qquad v_{\max} = 0.97\,m/s$

$\tau = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{l} \qquad \tau_{\min} = 3.8\,N \qquad \tau_{\max} = 4.15\,N$

b) $T' \simeq T \qquad \Omega' = \Omega \qquad \tau(\text{costante di tempo}) = 40\,s \qquad s(t) = l\theta(t) = l\Theta\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\Omega t)$

1.22 – **a)** $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \dfrac{m}{b}\,\vec{v}_0\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0\,e^{-\frac{b}{m}t}$

b) $v(t) = \dfrac{v_0}{1 + \frac{b}{m}\,v_0 t} \qquad x(t) = x_0 + \dfrac{m}{b}\,\ln\left(1 + \dfrac{b}{m}\,v_0 t\right)$

c) $\vec{v}(t) = \dfrac{\vec{F}}{b} + \left(\vec{v}_0 - \dfrac{\vec{F}}{b}\right)\,e^{-\frac{b}{m}t} \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \dfrac{\vec{F}}{b}\,t + \dfrac{m}{b}\,\left(\vec{v}_0 - \dfrac{\vec{F}}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$

1.23 – **a)** $v_{0x} = 36\,m/s$ **b)** $k = 1.63\cdot 10^3\,N/m$ **c)** $\vec{v}_L = -4.9\,\hat{k}\,m/s$ **d)** $1.9\,\%$

2.1 – $a_{3z} = -\dfrac{1}{17}\,g$

2.2 – $\left|\vec{N}\right| = 92\,N \qquad T = 1.3\,s$

2.3 – $\left|\vec{A}\right| \in [\,3.76\,,\ 11.3\,]\ m/s^2$

2.4 – **a)** $\mu_{s\min} = 0.25$ **b)** $\left|\overrightarrow{N_1}\right| = 0.915\,N \qquad t_1 = 0.95\,s$

2.5 – **a)** $\Theta = 6.68^\circ$ **b)** $\Theta' = 6.42^\circ$ (Calcolando, però, l'ampiezza con la conservazione dell'energia, e fermandosi a 3 cifre significative, si ottiene $\Theta' = 6.43^\circ$) **c)** $\mathcal{L}_\tau = 712\,J$

2.6 – **a)** $\theta_E = -7^\circ \qquad A = 1.20\,m/s^2$ **b)** $\ddot{\varphi}(t) + \dfrac{\sqrt{g^2 + A^2}}{l}\,\varphi(t) = 0$

$\varphi(t) = \Phi\cos\Omega t \qquad T = 2.53\,s$ **c)** $\tau_{\max} = 4.01\,N$

2.7 – $\mu_s = 0.12$

2.8 – $t \in [\,0\,,\ t^*\,]$ con $t^* = 14.7\,s \qquad \omega(t) = 0.2\,t \qquad |\vec{r}(t)| = 2 + 4.6\cdot 10^{-3}\,t^2$

$\left|\vec{N}(t)\right| = 1.4 - 6.5\cdot 10^{-3}\,t^2$

2.10 – **a)** $\omega_1 = 10.54\,s^{-1}$ **b)** $\delta_{\max} = 24\,cm \qquad T = 0.72\,s$

3.1 – $\vec{q}(t) = \dfrac{1}{2}\,\vec{c}\,t^2 \qquad \mathcal{L} = 2.5\cdot 10^{-4}\,J$

3.2 – $\mathcal{L} = \dfrac{3}{4}\,mgh$

3.3 – $|\vec{v}_0| = 72\,km/h$

3.4 – $|\vec{v}| = 14\,m/s \qquad \mathcal{L} = 20\,J$

3.5 – $s_{\text{tot}} = 48.2\,m$

3.6 – $x_f = 2.8\,m$ (con origine asse x in B)

3.7 – $|\vec{v}_0| \le g\,\sqrt{\dfrac{m}{k}\,(\mu_s^2 + 2\mu_s\mu_d)}$

3.8 – **a)** $s_{\text{tot}} = 39.2\,cm$ **b)** $t_{\text{tot}} = 1.40\,s$

3.9 – $v_{\max} = 1.47\,m/s$

3.10 – **a)** $|\vec{v}| = 8.7\,m/s$ **b)** $\delta_{\max} = 71.3\,cm$ **c)** $h_3 = -1.14\,m$

3.11 – $g(h) = g_0\left(1 + \dfrac{h}{R}\right)^{-2}$ **a)** $g(1\,km) \simeq 9.8\,m/s^2 \simeq g_0\left(1 - 2\,\dfrac{h}{R}\right)$;

b) $g(100\,km) \simeq 9.5\,m/s^2 \simeq g_0\left(1 - 2\,\dfrac{h}{R}\right)$ **c)** $g(R) = 2.45\,m/s^2$

$\mathcal{L}_{(\to 1\,km)} = 98.0\cdot 10^3 J \qquad \mathcal{L}_{(\to 100\,km)} = 9.65\cdot 10^6 J \qquad \mathcal{L}_{(\to R)} = 313\cdot 10^6\,J$

3.12 – **a)** $|\vec{f}| = mg\sin\theta$ **b)** $\mathcal{L}_f = -5.8\,J$ **c)** $\left|\vec{N}\right|_{\theta=0} = 35.6\,N$

3.13 – **a)** $v_{\min} = 6.26\,m/s$ **b)** $\left|\vec{N}(\theta)\right| = 4.13\, + 1.47\,(3\cos\theta - 2)\ \ N$ $\theta^* = 105.7°$

3.14 – $\Theta_{\max} = 33.6°$

3.15 – **a)** $U_p(C) = \dfrac{mgl}{3}$ **b)** $v_x(C) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{gl}$; $v_y(C) = \dfrac{\sqrt{15}}{9}\sqrt{gl}$

c) $t^* = \dfrac{4\sqrt{15}}{9}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

3.16 – $\left|\vec{A}\right| = 2.06\,m/s^2$ $t_{\text{tot}} = 2.03\,s$ Sì, dal momento che: $\mu_{s_{\min}} = 0.21$

3.17 – $v_{(\text{in O'})} = 0.98\,m/s$ $x_f = 0.49\,m$ OK, infatti: $\dfrac{\omega^2 x_f}{\mu_s g} < 1$

3.18 – **a)** $V = 20.74\,cm/s$ $v_r = 2.634\,m/s$ **b)** $\mu_{s_{\min}} = 0.026$

3.19 – **a)** $\omega \in [\,5.1\,,\ 6.9\,]\ s^{-1}$ **b)** $|\vec{v}_a| = 9.0\,m/s$

3.20 – $\mathcal{L} = 3.94 \cdot 10^8\,J$

4.1 – **a)** $R_P \simeq 5 \cdot 10^4\,m < R_T$ **b)** $|\vec{v}_I| = 6.75 \cdot 10^3\,m/s$

4.2 – $\alpha = 6.25°$

4.3 – $\theta^* = \arccos\left[\dfrac{\omega_0^2 l}{4g}\left(\sqrt{1 + \left(\dfrac{4g}{\omega_0^2 l}\right)^2} - 1\right)\right]$

4.4 – **a)** $\vec{L}_O = \dfrac{11}{20}\,\dfrac{GMm}{u}\,\hat{k}$ **b)** $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{11}{40}\,\dfrac{GM}{u}$ $E = -\dfrac{11}{8}\,m\,u^2$

c) $v_P = \left(\dfrac{20}{11} + \sqrt{\dfrac{269}{484}}\right)u$; $r_P = \dfrac{11}{20}\,\dfrac{GM}{v_P u}$

$v_A = \left(\dfrac{20}{11} - \sqrt{\dfrac{269}{484}}\right)u$; $r_A = \dfrac{11}{20}\,\dfrac{GM}{v_A u}$