La Forza Elastica e l'oscillatore armonico

"A companion guide" (Una guida passo passo)

1 La legge della forza

1. Forze di deformazione. Delle 4 interazioni fondamentali solo due agiscono a livello macroscopico: quella gravitazionale e quella elettromagnetica. Della seconda, l'effetto macroscopico che si studia nella scuola superiore è la forza di Coulomb, che è descritta da una legge molto simile alla legge di gravitazione universale, con la fondamentale differenza che le cariche elettriche possono essere positive e negative e quindi la forza (elettrostatica) può essere attrattiva o repulsiva. Se le cariche si muovono le cose si complicano, nasce un campo magnetico (oltre quello elettrico), ci possono essere irraggiamento e onde elettromagnetiche. Tutto ciò verrà affrontato in Fisica2 (Elettromagnetismo e Ottica). La cosa va impostata diversamente se il sistema in esame ha dimensioni microscopiche, bisogna utilizzare l'apparato formale della Meccanica Quantistica. In questo modo si possono studiare le cosiddette **Forze Molecolari**, le quali, in maniera qualitativa, presentano un andamento repulsivo a piccole distanze intermolecolari e attrattivo a grandi distanze: rispetto ad un punto di equilibrio (stabile) che è dell'ordine di qualche unità fino a qualche centinaia di ångstrom (1 Å$=10^{-10}m$). Queste forze sono, in ultima analisi, l'origine delle **forze di deformazione** e delle **forze di attrito**, che si studiano nella meccanica macroscopica elementare. Le prime si manifestano macroscopicamente come reazione ogni qualvolta si applica ad un corpo esteso solido (ma anche ad un fluido) una "azione" tendente a modificarne la struttura, a modificare cioè l'assetto spaziale del reticolo molecolare, spostando le singole molecole dalle posizioni medie di equilibrio. Si parla di **regime elastico** se, una volta rimossa la forza applicata, il corpo riacquista la sua forma iniziale.

Nel nostro corso ci limiteremo al caso 1-dimensionale della deformazione lineare per **trazione** e per **compressione**. Sperimentalmente si verifica che, in regime elastico al crescere dell'intensità della forza applicata, entro un certo limite (**limite di proporzionalità**), la deformazione è proporzionale alla forza applicata; questo è detto anche **regime di Hooke**, dal nome del fisico, Robert Hooke, che per primo, nel 1675, stabilì la legge di proporzionalità:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{l_0}{S}F \qquad\qquad \text{(per l'allungamento)}$$

con: E una costante che dipende dal materiale, l_0 la lunghezza iniziale del corpo, S l'area della sezione del corpo perpendicolare alla direzione della forza applicata e F il modulo di tale forza.

Questo comportamento può essere utilizzato, in "senso inverso", per misurare l'intensità della forza applicata mediante l'osservazione della deformazione Δl. Su questa base sono stati costruiti i *dinamometri*, cioè gli strumenti di misura statica della forza.

Naturalmente, alla forza applicata, azione, corrisponde da parte del corpo una reazione, uguale ed opposta, che è la forza di deformazione e che chiameremo, nel regime di Hooke, **forza elastica**.

2. La molla ideale e l'espressione della forza. Una schematizzazione molto utile, per trattare la forza elastica, è quella di un particolare corpo deformabile linearmente, che chiameremo "molla ideale" (o semplicemente molla): essa ha la forma di una molla elicoidale, ha **massa trascurabile** e opera nel regime di proporzionalità.

Disegnate sul vostro quaderno una molla in orizzontale (figura 1), con i due estremi A e B, e immaginiamo qui, ma solo per introdurre il ragionamento e le definizioni, che ad essi siano applicate due forze di trazione, con i versi verso l'esterno, $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$, e che la molla sia ferma, in equilibrio (allo stesso modo possiamo considerare due forze di compressione). Le due forze avranno necessariamente lo stesso modulo. Il fatto che la massa sia trascurabile ci permette di concludere che questo è vero anche nel caso generale quando le forze variano con il tempo e la molla sia in movimento.

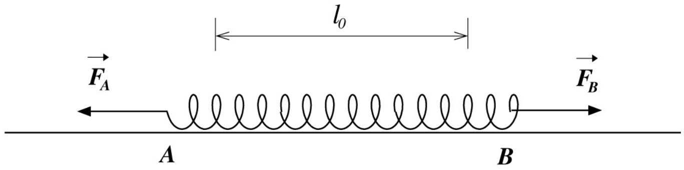

Figura 1: rappresentazione di una molla ideale.

Chiamiamo $\mathbf{l_0}$ la lunghezza della molla a "riposo", non deformata, cioè quando non vi è applicata nessuna forza agli estremi; essa è un parametro caratteristico della molla. La lunghezza della molla nella situazione statica rappresentata in figura è l. Se invece gli estremi sono in movimento la lunghezza è funzione del tempo: $l(t)$. Questa, come tutte le lunghezze, è uno scalare definito positivo ed è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle coordinate degli estremi (in formula: $l(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_{iB} - x_{iA})^2}$).

In 1-dimensione, però, possiamo scrivere più semplicemente (si scelgano A e B tenendo conto del verso dell'asse introdotto, in modo da avere $l > 0$):

$$l(t) = x_B(t) - x_A(t) \quad ;$$

(come già detto, in generale i due estremi si muoveranno entrambi nel tempo).

Ora:

Def. - Chiamiamo **deformazione** (della molla) la differenza $l - l_0$:

$$\Delta l = l - l_0 \begin{cases} > 0 & \textbf{allungamento} \\ < 0 & \textbf{compressione} \end{cases} \quad .$$

Dunque:

$$\Delta l(t) = x_B(t) - x_A(t) - l_0 \ .$$

Bisogna abituarsi a pensare a questa espressione quando si parla di deformazione di una molla!

In realtà, **non ci occuperemo mai** delle due forze $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ che agiscono sulla molla, semplicemente perché la molla non costituisce il corpo su cui focalizzare il nostro interesse, è un oggetto ideale, una specie di "generatore di forza elastica". Ci interessano le due forze di reazione a queste forze esterne, quelle che abbiamo chiamato **forze elastiche** e che agiscono sui corpi che saranno attaccati agli estremi della molla, indichiamole con $\vec{f}_A^{el}$ e $\vec{f}_B^{el}$.

Le due forze elastiche hanno la direzione dell'asse della molla, hanno ugual modulo e, essendo opposte alle forze $\vec{F}$, avranno i versi rivolti all'interno nel caso di allungamento della molla e rivolti all'esterno nel caso di compressione; tendono cioè a ripristinare la situazione di non deformazione:

$$\vec{f}_A^{el} = -\vec{f}_B^{el} \quad . \tag{1}$$

La proprietà di proporzionalità (regime di Hooke) implica che il modulo della forza elastica è proporzionale alla deformazione:

$$|\vec{f}_A^{el}| = |\vec{f}_B^{el}| = k|\Delta l| \quad ,$$

dove k è una costante positiva, detta **costante elastica** della molla, la cui unità di misura è il **newton su metro**:

$$[k] = [f][l^{-1}] = [m\,t^{-2}] \quad .$$

Come scrivere allora l'espressione **vettoriale** della forza elastica esercitata da un estremo della molla? È piuttosto intuitivo, ma quello che segue è uno **schema**, un po' didascalico, che può tornare utile in futuro, nel caso in cui agli estremi saranno effettivamente attaccati due corpi.

Si operi secondo questa successione logica riportando sul proprio quaderno un disegno simile alla figura 1:

a) Una molla ideale, si disegna la molla elicoidale su una superficie orizzontale liscia e non si nominano ancora gli estremi. Se la molla è allungata (nell'istante t generico), $\Delta l > 0$, si disegnano i due vettori, opposti, che rappresentano le forze elastiche con le punte verso l'interno. Viceversa nel caso di molla compressa.

b) Si introduce, secondo l'asse della molla, un asse cartesiano di riferimento (ad esempio x). Si fissa l'origine (dove si vuole) e il verso: fissato questo, si chiama A l'estremo che viene prima e B quello che viene dopo, ciò al fine di avere sempre che $l = x_B - x_A$ sia positiva.

c) Si scrivono le espressioni delle forze: quella concorde con il verso scelto dell'asse è $\vec{f}^{el} = k\,\Delta l\,\hat{x}$, quella discorde ha invece il segno meno davanti a k; se la molla è compressa i segni rimangono gli stessi perché è $\Delta l < 0$.

d) Nelle due espressioni si sostituisce a l la differenza $x_B(t) - x_A(t)$ e il gioco è fatto: ottenute le due leggi di forza, esse possono essere sostituite nelle equazioni (vettoriali) del moto del corpo sul quale ciascuna forza agisce. La dipendenza della legge della forza dalle coordinate degli estremi assicura che, muovendosi questi ultimi nel corso del tempo, la forza elastica cambi verso quando cambia il segno di Δl (come deve essere).

Nella parte della dinamica di cui dobbiamo occuparci ora, quella del corpo singolo puntiforme, lo schema risulta più semplice. Uno degli estremi della molla è agganciato ad un supporto rigido **fisso**, per cui la sua coordinata non cambia nel tempo: la forza elastica agisce sul supporto e da parte di quest'ultimo viene esercitata una forza uguale ed opposta, che chiameremo **vincolare** (vedi più avanti).

All'altro estremo, cosiddetto **libero**, "aggancerem" oppure "appoggeremo" un corpo materiale di massa m, che disegniamo come un blocchetto ma consideriamo puntiforme a tutti gli effetti. Dunque la coordinata dell'estremo libero è anche quella del corpo, è semplicemente $x(t)$. Si veda la figura 2.

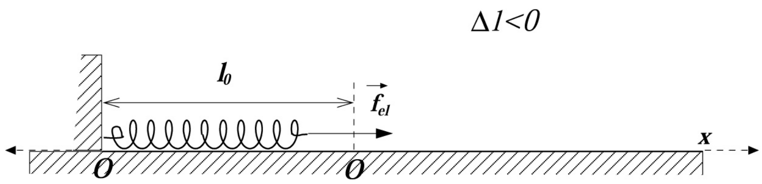

Figura 2: Introduzione di un sistema di riferimento per una molla (2 possibili origini + 2 versi possibili).

Ci si può dedicare ora al seguente esercizio (assai consigliato).

Esercizio Si considerino 4 modi diversi di introdurre il sistema di riferimento: con l'origine nell'estremo fisso oppure con l'origine nel punto in cui si trova l'estremo libero quando la molla è a riposo, e per ciascuno di questi casi nei due versi possibili dell'asse. Per le due scelte dell'origine la coordinata dell'estremo fisso sarà facilmente individuata (o zero o $+/-\ l_0$), mentre la coordinata dell'estremo libero, **variabile** col tempo, sarà sempre indicata con $x(t)$ (come detto, essa indica anche la posizione del corpo di massa m, sul quale agisce la forza elastica). Si ripeta nei 4 casi la successione $a) \rightarrow d)$ in modo da familiarizzarsi con espressioni diverse della legge della forza elastica.

Si devono ottenere le quattro espressioni:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \vec{f}^{el} = -k\,[x(t) - l_0]\,\hat{x} \\
&2) \quad \vec{f}^{el} = k\,[-x(t) - l_0]\,\hat{x} \\
&3) \quad \vec{f}^{el} = -k\,x(t)\,\hat{x} \\
&4) \quad \vec{f}^{el} = k\,[-x(t)]\,\hat{x}\ ,
\end{aligned}$$

le prime due nel caso dell'origine coincidente con l'estremo fisso, le seconde due nel caso dell'origine coincidente con il punto dell'estremo libero quando la molla è a riposo. Da queste espressioni si nota che il termine contenente "$kx(t)$" ha **sempre** il segno meno e che la seconda scelta per l'origine conduce ad un'espressione assai semplice (che è l'unico caso considerato di solito dai libri di testo), da cui si comprende che la lunghezza a riposo della molla, l_0, non è un parametro essenziale.

---

2 L'equazione del moto

1. Compare sulla scena l'equazione differenziale. Con la schematizzazione appena fatta abbiamo dunque introdotto una particolare forza (macroscopica) che è la **forza elastica**, della quale siamo in grado di esibire, a prescindere dal corpo su cui agisce, la legge di forza (cioè la relazione che lega la forza alla posizione $x(t)$ del corpo).

Consideriamo una molla ideale posta su un piano orizzontale, con un estremo fissato a qualcosa che sia rigidamente connesso al piano orizzontale (come nella figura 2). Questo supporto nel punto d'attacco della molla sviluppa una **reazione vincolare** che agisce sull'estremo della molla, uguale ed opposta alla forza elastica che la molla esercita su di esso. L'attributo "vincolare" fa riferimento al vincolo costituito dal supporto nei confronti dell'estremo della molla: in questo caso è un vincolo **bilaterale**, perché l'estremo della molla è agganciato e non appoggiato, e non si può muovere né in un senso né nell'altro. Facciamo la scelta numero 3) tra quelle esaminate alla fine della sezione precedente (se facciamo una delle prime due, talvolta convenienti, otteniamo un "termine noto" nella equazione del moto, cioè un'equazione differenziale "non omogenea", che tratteremo più avanti). E consideriamo poi anche un secondo asse, z, verticale.

Attacchiamo un blocchetto di massa m all'estremo libero della molla: esso poggia sul piano orizzontale e sia trascurabile l'attrito tra le superfici a contatto (vedi la figura 3).

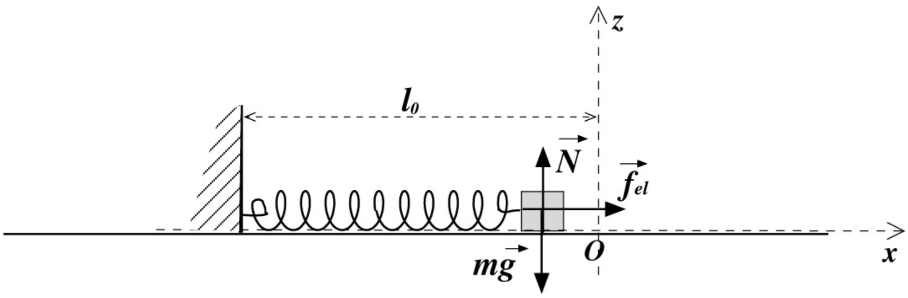

Figura 3: diagramma delle forze sul corpo di massa m.

Bene, dobbiamo ora scrivere l'equazione del moto ($\sum \vec{f} = m\vec{a}$) e risolverla, dobbiamo cioè determinare la legge oraria del moto del blocchetto. Lo schema che proponiamo di seguito è assai utile nell'impostare qualunque esercizio di dinamica (si tratta del cosiddetto "pentalogo"):

I) Fare un buon disegno della situazione descritta nel testo dell'esercizio.

II) Fare il diagramma delle forze agenti sul corpo (o sui singoli corpi, se ce n'è più d'uno, "diagramma delle forze di corpo singolo"), individuandole con accuratezza e disegnando per ciascuna un vettore rappresentativo.

III) Scrivere l'equazione del moto (cioè la legge di Newton: $\sum \vec{f} = m\vec{a}$). Nel nostro caso, come già detto, consideriamo trascurabile l'attrito tra il blocchetto e il piano orizzontale ("superfici lisce"), quindi:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}^{el} = m\vec{a} \quad .$$

IV) Introdurre un sistema di riferimento (scegliendo posizione dell'origine O e versi degli assi).

V) Proiettare l'equazione vettoriale sugli assi. Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} z: &\qquad -m\,g + N_z = 0 \\ x: &\qquad -k\,x(t) = m\,\ddot{x} \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

La forza peso è, per definizione, $m\,\vec{g}$ e la sua componente su z è nota. La forza $\vec{N}$ è la Reazione vincolare (Normale) del piano orizzontale sul corpo, dunque essa è verticale e la sua componente su z, N_z o semplicemente N, è **incognita** per definizione. Dalla prima equazione si ricava il suo valore. L'equazione su z non serve ad altro.

(**Attenzione**: per il Principio di Azione e Reazione, il corpo di massa m esercita una forza uguale ed opposta ad $\vec{N}$, anch'essa una Reazione vincolare, sul piano su cui è poggiato; **in questo caso** il suo valore, ma soltanto il suo **valore**, è proprio uguale ad $m\,\vec{g}$).

E veniamo all'equazione su x. Qui è bene ricordare che al secondo membro c'è l'accelerazione, a_x o semplicemente a, che è un'incognita: il suo valore è dunque determinato dalle componenti delle forze contenute nel primo membro. Se queste ultime sono funzione solo del tempo (in particolare costante), l'equazione del moto è una equazione algebrica, che permette di ricavare $a(t)$. Questa funzione si integra due volte, così come abbiamo visto in Cinematica (utilizzando le condizioni iniziali come costanti di integrazione), e così si ottiene la legge oraria: $x(t)$. Se, però, nelle leggi delle forze c'è una dipendenza funzionale dalla o dalle coordinate spaziali ed eventualmente dalla velocità, queste certamente non sono note a priori, anzi rappresentano la soluzione finale del problema. È questo il caso della forza elastica: nell'equazione (2), a primo membro, c'è la funzione incognita $x(t)$, non si può procedere per semplice integrazione diretta (bisogna capire bene questo punto). Abbiamo davanti un'**equazione differenziale**!

2. L'equazione differenziale del Moto Armonico. L'equazione (2) si scrive, allora, nella forma:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\,x(t) = 0 \qquad\qquad \frac{k}{m} \equiv \Omega^2 \quad ; \tag{3}$$

essa è **lineare** (la funzione incognita, $x(t)$, e le sue derivate vi sono contenute come combinazione lineare), a **coefficienti costanti** (rispetto alla variabile indipendente, qui il tempo) e **omogenea** (termine noto nullo, quello non dipendente dalla $x(t)$).

Il coefficiente del termine in x deve essere positivo, se si ottenesse (nei casi più complicati dopo alcuni calcoli) una equazione con un coefficiente negativo, questo sarebbe il campanello di allarme di un errore di calcolo!

L'equazione (3) è detta equazione differenziale del **moto armonico** (il quale è stato già studiato in Cinematica): $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è detta **pulsazione** ed è positiva (è consigliabile usare Ω maiuscola, giusto per evitare di confondersi in futuro con la velocità angolare); essa è legata al valore del periodo del moto dalla relazione $T = 2\pi\,\Omega^{-1}$. Qualunque sistema descritto da questa equazione è detto **oscillatore armonico**.

La breve Appendice E del Rosati([1]) sintetizza giusto quel che serve a proposito di questo tipo di equazioni differenziali. C'è un po' da lavorare con le formule di trigonometria o, piuttosto, con le formule di Eulero([2]):

$$\begin{aligned} e^{i\alpha t} &= \cos\alpha t + i\sin\alpha t \\ e^{-i\alpha t} &= \cos\alpha t - i\sin\alpha t \quad ; \end{aligned}$$

(per quel che riguarda i numeri complessi trovate, sempre sulla PW, una nota assai utile su questo argomento, scritta da uno studente di qualche anno fa).

[1]Si trova sulla PW = Pagina-Web: 'http://people.na.infn.it/clarizia'.

[2]Se usate il libro di testo di Rosati, attenzione agli errori di stampa nella nota di pag. 76.

È opportuno cimentarsi nel caso generale (quello delle equazioni differenziali del 2° ordine, lineari e a coefficienti costanti), ma qui, specificamente per l'equazione del moto armonico, vogliamo determinare in un modo più semplice la soluzione generale, ed esprimerla in funzione delle condizioni iniziali (posizione e velocità a un dato istante).

Innanzitutto, individuiamo una funzione che è sicuramente soluzione dell'equazione (3): $\sin(\Omega\, t)$. Basta sostituirla nella equazione e verificarlo. Ma allo stesso modo verifichiamo che anche la funzione $\cos(\Omega\, t)$ è una soluzione. Abbiamo dunque due soluzioni. Ora, il fatto che la (3) è lineare comporta che, se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono due soluzioni dell'equazione, anche una combinazione lineare

$$f(t) = c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t) \tag{4}$$

è soluzione, con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie. Ed è facile verificarlo per sostituzione nell'equazione.

Per un'equazione del *2° ordine*, si dimostra([3]) che, se $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ sono *linearmente indipendenti*, la combinazione lineare con 2 costanti arbitrarie data dalla (4) è la soluzione generale dell'equazione, cioè l'insieme che esaurisce le soluzioni della equazione, al variare di c_1 e c_2; in più, queste costanti sono univocamente determinate una volta che si assegnino le condizioni iniziali. La funzione (4) permette quindi di conoscere come varia la soluzione dell'equazione differenziale al variare dei dati iniziali.

Le due soluzioni già trovate per l'equazione del moto armonico, $f_1(t) = \sin(\Omega t)$ e $f_2(t) = \cos(\Omega t)$, sono effettivamente linearmente indipendenti. Infatti, non è possibile trovare una coppia (a, b) di numeri reali non nulli in modo che la relazione

$$a \sin(\Omega t) + b \cos(\Omega t) = 0$$

sia identicamente soddisfatta ad ogni istante t. Se ci fossero (e sarebbero **entrambi** non nulli, in questo caso con $n = 2$), le due funzioni sarebbero proporzionali o, altrimenti detto, la funzione $\tan(\Omega t)$ sarebbe costante $\forall t$, fatti che sono palesemente non veri. Dunque, abbiamo la soluzione generale dell'equazione (3):

$$x(t) = c_1 \sin(\Omega t) + c_2 \cos(\Omega t) \quad . \tag{5}$$

Vediamo come si esprimono le costanti d'integrazione c_1 e c_2 in termini dei dati iniziali $x(0) = x_0$ e $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Calcoliamo la funzione (5) e la sua derivata in $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_0 = x(0) &= c_2 \\ v_0 = \dot{x}(0) &= c_1\, \Omega \cos(0) - c_2\, \Omega \sin(0) = c_1 \Omega \quad . \end{aligned}$$

Riscriviamo la (5) in termini dei dati iniziali:

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) + x_0 \cos(\Omega t)\ . \tag{6}$$

Ecco, dunque, la legge oraria del generico moto armonico, nella forma più esplicita in termini di condizioni iniziali (è molto utile considerare per proprio conto alcuni semplici casi esemplari). Ma non è la forma più immediatamente comprensibile in termini di proprietà e di grafico. Con procedimento assai usato, i due coefficienti nella (6) possono essere interpretati come le coordinate di un punto in uno spazio 2-dimensionale e sono quindi equivalentemente esprimibili in termini di coordinate polari, e cioè la distanza

[3] Si dimostra per n intero positivo, ma qui ci interessa il caso $n = 2$.

del punto dall'origine e la sua *anomalia*. Chiamiamo A la distanza e φ_0 l'anomalia, per cui poniamo:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}}$$

$$A\cos(\varphi_0) = \frac{v_0}{\Omega} \quad , \quad A\sin(\varphi_0) = x_0 \quad , \tag{7}$$

e allora la funzione (6) può essere scritta così:

$$x(t) = A[\sin(\Omega t)\ \cos(\varphi_0) + \cos(\Omega t)\ \sin(\varphi_0)] = A\sin(\Omega t + \varphi_0) \quad , \tag{8}$$

che è la forma che adotteremo in tutto il corso per la maggiore leggibilità; si può anche usare, secondo le preferenze, quella con il $\cos(\Omega t + \varphi_0')$ con $\varphi_0' = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$.

La funzione (8) rappresenta una oscillazione armonica. A è l'**ampiezza** dell'oscillazione ed è **definita positiva** e $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ è la **fase iniziale**: esse dipendono dalle condizioni iniziali in accordo con le equazioni (7). Ricordiamo che la (8) può essere visualizzata come la proiezione sull'asse delle y (o delle x per il *coseno*) di un vettore ruotante di modulo A e con velocità angolare Ω **costante**, rendendo così più evidente il significato della **fase iniziale** (vedi la figura 4 che mostra il diagramma orario di un particolare moto armonico).

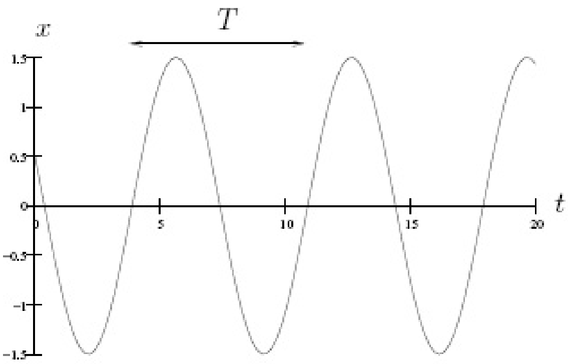

Figura 4: diagramma orario di un moto armonico con $\Omega = \frac{\pi}{3.5}\,s^{-1}$, $A = 1.5\,dm$ e $\varphi_0 = 2.8\,rad$ ($\simeq 160°$). Si noti la periodicità, il periodo è $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 7\,s$.

Nel testo di un esercizio contenente un oscillatore armonico, in generale, sono contenuti, come dati, i valori di x_0 e v_0 e quindi, dal sistema di equazioni (7) bisogna ricavare A e φ_0, in modo da poter scrivere la soluzione nella sua forma specifica per il caso in esame. Il caso più semplice e di immediata soluzione è quello con $v_0 = 0$: in questo caso $A = |x_0|$ e $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ oppure $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ a seconda del segno di x_0; in questo caso la soluzione si può scrivere, più utilmente, in questa forma: $x(t) = x_0\cos(\Omega t)$. Se invece $v_0 \neq 0$ e $x_0 = 0$, $A = \frac{|v_0|}{\Omega}$ e $\varphi_0 = 0$ o $\varphi_0 = \pi$ a seconda del segno di v_0.

La funzione (8) rappresenta un moto armonico avente come centro dell'oscillazione l'origine dell'asse cartesiano x, origine che abbiamo posto nel punto in cui si trova l'estremo libero della molla in condizioni di riposo, che è pure punto di equilibrio per il corpo attaccato a quell'estremo.

In generale, l'equazione (3) ha, a secondo membro, quello che si chiama un termine noto e cioè una o più componenti lungo x di ulteriori forze agenti (divise per la massa). L'equazione differenziale viene detta, in questo caso, **non omogenea**. Nel caso semplice di forze costanti (e solo di questo caso ci occuperemo nel nostro corso) il centro di oscillazione sarà quel particolare punto geometrico che corrisponde alla posizione di equilibrio (reale o virtuale) per il corpo di massa m.

Infatti, chiamiamo la coordinata di tale posizione x_c, allora $x(t) = x_c$ è sicuramente una soluzione, particolare o "banale" (perché costante), della equazione differenziale non omogenea. La teoria delle equazioni differenziali lineari ci assicura che la soluzione generale di un'equazione non omogenea è data dalla somma di una qualsiasi soluzione particolare dell'eq. non omogenea e della soluzione generale dell'eq. omogenea associata (che si ottiene cioè da quella non omogenea cancellando il termine noto). Quindi la soluzione della nostra equazione sarà:

$$x(t) = A\sin(\Omega\, t + \varphi_0) + x_c \quad ,$$

da cui risulta chiaro che la presenza di altre forze costanti produce uno "spostamento del centro dell'oscillazione".

Le equazioni (7), conseguentemente, devono essere riscritte nel caso non omogeneo. Esse diventano:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(x_0 - x_c)^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}} \\ A\cos(\varphi_0) = \frac{v_0}{\Omega} &\quad , \quad A\sin(\varphi_0) = x_0 - x_c \quad . \end{aligned}$$

Come esempio di equazione non omogenea, consideriamo dapprima il caso senza ulteriori forze, ma quello in cui avessimo fatto la scelta 1) dell'elenco che è alla fine della sezione precedente, cioè: l'origine dell'asse x nell'estremo fisso della molla e verso a destra. L'equazione del moto si scrive:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\, x(t) = \frac{k\, l_0}{m} \quad .$$

Questa equazione è **non omogenea** perché ha un termine noto (cioè non dipendente dalla funzione x o dalle sue derivate), che è costante (rispetto al tempo). Come abbiamo detto, la soluzione generale dell'equazione è data dalla soluzione generale dell'equazione omogenea associata più una soluzione particolare (una qualsiasi) della non omogenea. Questa soluzione particolare è la soluzione banale $x = cost = x_c$, la cui derivata seconda è ovviamente nulla, dunque:

$$\frac{k}{m}\, x_c = \frac{k\, l_0}{m} \quad ,$$

cioè $x_c = l_0$.

La soluzione generale è data da:

$$x(t) = l_0 + A\sin(\Omega t + \varphi) \quad ,$$

che oscilla intorno a l_0 (come deve essere).

Altro esempio, questa volta con una seconda forza agente e che lasciamo come esercizio al lettore: si consideri una molla in verticale, fissata superiormente ad un supporto e con il corpo di massa m attaccato inferiormente e pendente nel vuoto. Si scelga l'asse z, origine e verso, si scriva l'equazione vettoriale del moto, la si proietti sull'asse z (la molla ha, ovviamente, lunghezza l_0 quando il corpo non è attaccato). Questa volta il termine noto contiene la componente della forza peso. Qual è la soluzione particolare z_c? Ad essa corrisponde o no la posizione di equilibrio e quindi il centro dell'oscillazione? E ad essa corrisponde anche il punto in cui la velocità è massima?

3. Ma che cos'è una equazione differenziale? (Una computazione alle differenze finite). All'inizio del corso abbiamo dato alla derivata un significato molto concreto come rapporto incrementale. La velocità può dunque essere scritta (in 1-dim):

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

e l'accelerazione:

$$a(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad .$$

L'equazione del moto è una relazione che coinvolge l'accelerazione di un corpo; da questa equazione vogliamo ottenere la legge oraria per integrazione; il processo d'integrazione nel caso dei rapporti incrementali scritti sopra non è altro che:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + v(t)\,\Delta t \\ v(t+\Delta t) &= v(t) + a(t)\,\Delta t \quad , \end{aligned}$$

cioè l'inversione di quelle equazioni algebriche. Naturalmente essendo finito il passo temporale, bisogna sostituire il continuo del tempo con la numerazione degli istanti:

$$t \longrightarrow t_n \qquad \text{(a partire da } n = 0) \ ,$$

e scrivere:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n\,\Delta t && (9) \\ v_{n+1} &= v_n + a_n\,\Delta t \quad . && (10) \end{aligned}$$

Ora, vediamo che cosa succede mettendo in gioco la nostra equazione del moto, l'equazione (2):

$$a(t) = -\frac{k}{m}\,x(t) \quad ,$$

che riscriviamo:

$$a_n = -\frac{k}{m}\,x_n \quad . \tag{11}$$

Vogliamo usare un foglio di calcolo (EXCEL), cominciamo dalle condizioni iniziali: esse non sono altro che x_0 e v_0 e sono presenti nella prima delle (9). Potete scegliere, ad esempio (ma potete sbizzarrirvi), $x_0 = 3\,cm$ e $v_0 = 4\,cm/s$. Quanto ai valori di k e di m, per semplicità, prendiamo questi in modo che sia $\Omega = 1\ s^{-1}$. Scegliamo ora un passo temporale: ad esempio $\Delta t = 0.2\,s$; con questo passo, con 30-40 punti copriamo un periodo, cioè una oscillazione intera.

La prima delle (9) permette di ottenere il punto x_1. E il punto x_2? Ci vuole la velocità v_1, che prendiamo dalla prima delle (10), cioè:

$$v_1 = v_0 + a_0\,\Delta t \quad .$$

Oibò, ci serve a_0!! Fin qui abbiamo utilizzato le definizioni cinematiche, ma il valore di a_0 non è fornito dalla cinematica. Ecco che interviene la legge di Newton, che **lega l'accelerazione alla legge di forza** e che, in questo caso della forza elastica, lega l'accelerazione (derivata seconda della funzione incognita) al valore della funzione stessa punto per punto. Nel nostro caso abbiamo l'equazione (11), che diventa:

$$\forall n\ (= 0, 1, \ldots) \qquad a_n = -x_n \qquad \textbf{!}$$

Niente male, abbiamo dunque a_0 e quindi v_1 e quindi x_2 e così via... $x_n \dots$

Prendiamo un foglio di calcolo e proviamo con i metodi che abbiamo imparato. Possiamo mettere in una casella di riga 2 (la riga 1 serve per le definizioni), diciamo da colonna 6 in poi, il valore di Δt, poi il valore di x_0 e il valore di v_0, ed eventualmente i valori di k e di m. Questi potranno essere cambiati a piacere. Nella prime quattro colonne, dalla seconda riga in poi, andranno sistemati i valori dei tempi e, corrispondentemente, i valori delle x, delle v e delle a dati dalle successive equazioni (9), (10) e (11). Le tendine andranno tirate giù per 40 passi o più.

Inseriamo il grafico. Uhm! Le cose non vanno bene, i massimi e minimi non rimangono costanti; ma allora, forse, l'integrazione numerica non funziona! Effettivamente la funzione *seno* è una funzione trascendente, di difficile convergenza con il metodo che abbiamo usato; possiamo però migliorarlo, con l'accorgimento di considerare i valori delle velocità nei punti di mezzo, piuttosto che nei punti iniziali, dell'intervallo Δt. Dunque nella prima casella, la C2, invece di riportare il nome della casella dove avevamo inserito il valore v_0, facciamo calcolare $v(\Delta t/2)$ utilizzando v_0 , a_0 e, naturalmente, $\Delta t/2$; nella successiva, C3, facciamo calcolare $v(3\,\Delta t/2)$ utilizzando la precedente v , a_1 e il Δt intero; e così via. La colonna B delle x non ha bisogno di essere cambiata perché leggerà i valori delle velocità nella colonna accanto **nei punti di mezzo**, come deve essere. Riproviamo con il grafico. Funziona!

E forse abbiamo imparato qualcosa anche sulle equazioni differenziali. Ci aspetta più in là un'integrazione di una equazione differenziale ben più spettacolare.