E

Equazioni differenziali

Un'**equazione differenziale ordinaria** è un'equazione contenente come incognite una funzione e le sue derivate rispetto alla variabile indipendente. Quando si hanno più variabili indipendenti compaiono le derivate parziali della funzione e si parla di **equazione alle derivate parziali**; in questo caso, in generale, il numero di equazioni differenziali da soddisfare è uguale al numero di variabili indipendenti e si ha quindi un sistema di equazioni differenziali. Il problema consiste nel determinare le funzioni delle variabili indipendenti in modo che le equazioni date risultino soddisfatte e, di conseguenza, le equazioni differenziali costituiscono delle sorgenti per la scoperta di funzioni importanti per la Fisica-Matematica.

In questa Appendice la discussione verrà limitata a quelle equazioni differenziali ordinarie che più frequentemente compaiono nello studio della Meccanica senza presentare particolari difficoltà matematiche.

L'**ordine** *di un'equazione differenziale è dato dall'ordine più elevato delle derivate della funzione incognita f che compaiono nell'equazione.* Un'equazione differenziale si dice:

i) **lineare** *se non contiene potenze o prodotti della f e delle sue derivate;*
ii) **omogenea** *se non contiene termini indipendenti dalla f e dalle sue derivate;*
iii) **a coefficienti costanti** *se f e le sue derivate compaiono moltiplicate solo da coefficienti numerici.*

Come il calcolo di un integrale indefinito conduce a un'infinità di funzioni che differiscono tra loro per una costante additiva, così le equazioni differenziali possiedono un numero infinito di soluzioni se non si impone alla soluzione desiderata qualche condizione supplementare: queste condizioni, di solito, vengono chiamate **condizioni iniziali** o **condizioni al contorno**.

Un esempio di semplice equazione differenziale è:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0. \qquad \text{(E-1)}$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti. Una soluzione particolare è $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$, come si verifica per sostituzione. Esistono altre soluzioni della (E-1), ad esempio $f(t) = -\mathrm{e}^{-t}$; la **soluzione generale** o **integrale generale** (cioè l'insieme di tutte le funzioni che soddisfano l'equazione) è

$$f(t) = c\,\mathrm{e}^{-t}, \qquad \text{(E-2)}$$

con c costante arbitraria: attribuendo a c un determinato valore si ottiene una **soluzione particolare.**

Il caso esaminato rientra nel seguente teorema che assumeremo valido senza dimostrazione:

Teorema. La soluzione generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n contiene un nu-

 ISBN 88-408-0801-9

mero n di costanti arbitrarie (o costanti di integrazione).

La (E-1) è un'equazione differenziale del primo ordine, così la sua soluzione generale data dalla (E-2) contiene una sola costante arbitraria.

In un'equazione differenziale ordinaria di ordine n e non lineare la soluzione che contiene n costanti arbitrarie viene chiamata ancora **soluzione generale** o **integrale generale**; *una* **soluzione singolare** *è invece quella che non resta compresa nella soluzione generale*: ad esempio, l'equazione (non lineare)

$$f = t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{a}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}t},$$

ha come soluzione generale $f(t) = ct + a/c$ con c arbitrario, mentre $f^2(t) = 4at$ è una soluzione singolare.

Tuttavia, si può dimostrare che *la soluzione generale di un'equazione differenziale lineare esiste ed è unica*, contiene cioè tutte le possibili soluzioni.

Non esiste un metodo generale per risolvere tutte le equazioni differenziali, tuttavia per alcuni tipi di equazioni sono stati sviluppati dei metodi speciali. Le equazioni differenziali che incontreremo nello studio della Meccanica o della Termodinamica sono del primo o del secondo ordine. I due casi più importanti sono: *a*) le equazioni differenziali a variabili separabili e *b*) le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

a) *Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.* Tali equazioni possono scriversi nella forma

$$M(f)\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = N(t),$$

dove $M(f)$ è una funzione della sola f e $N(t)$ è una funzione della sola t. Moltiplicando i due membri per $\mathrm{d}t$ e integrando si ottiene

$$\int M(f)\,\mathrm{d}f = \int N(t)\,\mathrm{d}t + C,$$

dove C è una costante arbitraria; il problema è così ricondotto al calcolo di due integrali indefiniti.

Consideriamo, ad esempio, l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \beta f = g, \qquad \text{(E-3)}$$

con β e g costanti; si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = g - \beta f,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{g - \beta f} = \int \mathrm{d}t + C,$$

$$-\frac{1}{\beta}\log_{\mathrm{e}}|g - \beta f| = t + C,$$

e, ponendo $c = \pm\dfrac{\mathrm{e}^{\beta C}}{\beta}$ secondoché $g \lessgtr \beta f$, si ha:

$$f(t) = c\,\mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{g}{\beta}. \qquad \text{(E-4)}$$

b) *Equazioni differenziali lineari, omogenee, a coefficienti costanti, del primo o del secondo ordine.*

Le equazioni differenziali qui studiate sono quelle del primo o del secondo ordine; i risultati ottenuti sono però facilmente estendibili ai casi di ordini più elevati. Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$A\,\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2} + 2B\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + Cf = 0, \qquad \text{(E-5)}$$

con A, B e C costanti reali (le equazioni del primo ordine si ottengono come caso particolare ponendo $A = 0$). Si osservi che:

i) se $f(t)$ è una soluzione particolare della (E-5) anche $c\,f(t)$, con c costante, è una soluzione;

ii) se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono due soluzioni particolari della (E-5) anche $c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$, con c_1 e c_2 costanti, è una soluzione.

Le due proprietà precedenti sono conseguenze della omogeneità e della linearità dell'equazione in esame. Consideriamo la funzione $e^{\gamma t}$ e sostituiamola nella (E-5) al posto della f: l'equazione resta verificata se è soddisfatta l'uguaglianza

$$A\gamma^2 + 2B\gamma + C = 0,$$

cioè se γ assume uno dei due valori (reali o complessi) radici dell'equazione sopra scritta, che prende il nome di **equazione caratteristica** associata alla (E-5); si ottiene:

$$\gamma_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \qquad \gamma_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{E-6}$$

Distinguiamo i seguenti quattro casi.

1) $A = 0$. Si ha la sola radice $\gamma = -C/(2B)$ e la soluzione generale della (E-5) risulta

$$f(t) = c\, e^{\gamma t},$$

dove c indica una costante arbitraria e $\gamma = -C/(2B)$.

2) $B^2 - AC > 0$. Le due radici γ_1 e γ_2 sono reali e distinte: la soluzione generale della (E-5) è

$$f(t) = c_1\, e^{\gamma_1 t} + c_2\, e^{\gamma_2 t},$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

3) $B^2 - AC = 0$. Le due radici coincidono, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -B/A$. La soluzione generale non è $f(t) = e^{\gamma t}(c_1 + c_2)$: infatti, la quantità $c_1 + c_2$ può considerarsi come una sola costante arbitraria, mentre la (E-5) è un'equazione del secondo ordine e la sua soluzione generale deve contenere due costanti arbitrarie. Si verifica facilmente che (essendo per ipotesi $B^2 - AC = 0$) anche $t\, e^{\gamma t}$ è una soluzione particolare, quindi la soluzione generale è:

$$f(t) = e^{\gamma t}(c_1 + c_2 t).$$

4) $B^2 - AC < 0$. Le due radici γ_1 e γ_2 date dalla (E-6) sono complesse. Sia $\gamma_1 = \gamma + i\delta$ e $\gamma_2 = \gamma - i\delta$, con γ e δ costanti reali; la soluzione generale è

$$f(t) = c_1\, e^{\gamma_1 t} + c_2\, e^{\gamma_2 t}, \tag{E-7}$$

che alternativamente può venire scritta nella forma ($c_1 = c_2{}^*$ se la f è reale)

$$f(t) = e^{\gamma t}(c_1\, e^{i\delta t} + c_2\, e^{-i\delta t})$$

$$= e^{\gamma t}(d_1 \text{ sen } \delta t + d_2 \cos \delta t)$$

$$= D\, e^{\gamma t} \text{ sen } (\delta t + \varphi), \tag{E-8}$$

dove d_1 e d_2, oppure D e φ, rappresentano altrettante costanti arbitrarie. Nel caso particolare $B = 0$ la soluzione generale si ottiene dalla (E-8) ponendo $\gamma = 0$.

Equazioni differenziali lineari non omogenee. Data un'equazione differenziale lineare non omogenea si chiama equazione omogenea associata l'equazione che si ottiene dalla prima cancellando il termine non omogeneo. Vale il seguente teorema (la cui dimostrazione è lasciata come esercizio):

Teorema. La soluzione generale di un'equazione differenziale lineare non omogenea è data dalla somma di una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione non omogenea con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

In formula, indicando con $f_o(t)$ la soluzione dell'equazione omogenea associata e con $f_p(t)$ una soluzione particolare dell'equazione completa, si scrive:

$$f(t) = f_o(t) + f_p(t). \tag{E-9}$$

Si consideri, ad esempio, l'equazione (E-3)

$$\frac{df}{dt} + \beta f = g; \tag{E-10}$$

una sua soluzione particolare è $f_p(t) = g/\beta$, mentre l'equazione omogenea associata alla (E-10) è la seguente equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\frac{df}{dt} + \beta f = 0,$$

la cui soluzione generale è $f_o(t) = c\, e^{\beta t}$; la soluzione generale della (E-10) è perciò

$$f(t) = c\, e^{-\beta t} + \frac{g}{\beta},$$

che coincide appunto con la (E-4) ottenuta in maniera diversa.