I numeri complessi

Mario Spagnuolo
Corso di Laurea in Fisica - Facoltà di Scienze - Università "Federico II" di Napoli

1 Introduzione

Studiare i numeri complessi può sembrare inutile ed avulso dalla realtà; invece è un esercizio molto interessante, non solo per le innumerevoli applicazioni che essi hanno sia in matematica che in fisica, ma anche per spingere la mente oltre certi limiti e per aprirla ad ogni possibilità.

Le prime necessità di ampliare il campo dei numeri reali si sono avute nel XVI secolo, nell'ambito dello studio delle equazioni di secondo e di terzo grado. La domanda era: è possibile che equazioni del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ siano risolubili solo quando $\Delta \geq 0$?[1] Ovvero: come si risolve l'equazione $x^2 = -1$? Fu Rafael Bombelli (1526-1573) a risolvere questo inghippo introducendo[2] l'unità immaginaria i.

2 I numeri immaginari

2.1 L'unità immaginaria

Definizione 1:

$$i^2 \equiv -1 \tag{1}$$

Basta quest'unica definizione inserita nel campo dei numeri reali $\Re$ per ampliarlo e per costruire il campo dei complessi $\mathcal{C}$. Infatti, è semplice tirar fuori dalla (1) tutto quello che rende i numeri complessi così utili. La (1) definisce l'*unità immaginaria*[3].

Potrebbe interessarci l'eseguire le operazioni di base del campo dei reali[4] quando uno dei termini è l'*unità immaginaria*. Cosa mai succederebbe?

2.2 I numeri immaginari

Se moltiplichiamo un numero reale per i si ottiene quello che banalmente è detto *numero immaginario*[5]. L'insieme di tutti i numeri immaginari è indicato con $\Im$. Se $a \in \Re$:

$$a \cdot i = ai \qquad i, ai \in \Im$$

[1] Si rammenta che $\Delta = b^2 - 4ac$.
[2] Anche a lui venivano i 5 minuti...
[3] Perché non esiste né in cielo né in terra, ma solo nella testa dei matematici...
[4] L'addizione, la moltiplicazione e la divisione e le potenze.
[5] Ancora una volta non ha granchè senso...

3 I numeri complessi

Addizioniamo, ora, un numero reale con un immaginario e avremo un numero complesso:

$$a + ib = \mathbf{z} \quad \forall\ a \in \Re, \forall\ bi \in \Im,\ \ \mathbf{z} \in \mathcal{C}$$

Così si definiscono la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso:
Definizione 2:

$$\Re e\mathbf{z} \equiv a \qquad \Im m\mathbf{z} \equiv b \tag{2}$$

3.1 Addizione e moltiplicazione di due numeri complessi

Definizione 3:

$$+ : \quad (a+ib), (c+id) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow (a+c) + i(b+d) \in \mathcal{C} \quad (add.) \tag{3}$$

Definizione 4:

$$\cdot : \quad (a+ib), (c+id) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow (ac-bd) + i(ad+bc) \in \mathcal{C} \quad (molt.) \tag{4}$$

3.2 Il coniugato

Di cruciale importanza la seguente definizione di numero complesso coniugato $\bar{\mathbf{z}}$ (indicato molto spesso anche con $\mathbf{z*}$):
Definizione 5:

$$Se\ \ \mathbf{z} = a + ib \quad allora\ \ \bar{\mathbf{z}} = a - ib \tag{5}$$

Una particolare attenzione sia prestata al fatto che:

$$\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iab - iab - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |\mathbf{z}|^2 \tag{6}$$

ove
Definizione 6:

$$(modulo\ di\ \ \mathbf{z}) \quad |\mathbf{z}| \equiv \sqrt{a^2 + b^2} \tag{7}$$

3.3 L'inverso di un numero complesso

Definizione 7:

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2} \tag{8}$$

<u>*DIM*</u> Vale la pena dimostrare questa definizione. Infatti, poiché

$$\mathbf{z}\mathbf{z}^{-1} \equiv 1$$

$\mathbf{z}^{-1}$ sarà quel numero che soddisfa l'eguaglianza. Dunque:

$$\begin{aligned} (a+ib)(a'+ib') &= (aa'-bb') + i(ab'+ba') \\ (aa'-bb') + i(ab'+ba') &= 1 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ab' + ba' = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a' & = \frac{a}{a^2+b^2} \\ b' & = \frac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

dunque

$$\mathbf{z}^{-1} = (a - ib)\frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2}$$

4 Alcune utili rappresentazioni

4.1 Il piano di Argand-Gauss

Possiamo immaginare il campo dei numeri complessi come un piano di $\Re^2$ in cui, adottato un riferimento cartesiano ortogonale, l'asse delle ascisse rap-presenti i numeri reali e l'asse delle ordinate i numeri immaginari. In questa configurazione ogni numero complesso sarà rappresentato da una coppia di numeri reali[6]:

$$\mathbf{z} = (a, b) \quad . \tag{9}$$

Definizione 8:

$$+ : \quad (a, b), (c, d) \in \Re^2 \times \Re^2 \longrightarrow (a + c, b + d) \in \Re^2 \quad (add.) \tag{10}$$

Definizione 9:

$$\cdot : \quad (a, b), (c, d) \in \Re^2 \times \Re^2 \longrightarrow (ac - bd, ad + bc) \in \Re^2 \quad (molt.) \tag{11}$$

L'*unità immaginaria* nel piano di Argand-Gauss è individuata dalla coppia

$$(0, 1) \equiv i \tag{12}$$

mentre l'unità reale

$$(1, 0) \equiv 1 \tag{13}$$

Facendo riferimento a quanto detto, ogni coppia complessa può essere vista come

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib \tag{14}$$

che fornisce anche una forte connessione con la scrittura in forma algebrica di un numero complesso.

Ma non finisce qui. Infatti, se ogni numero complesso nel piano di Argand-Gauss è rappresentato da un punto, è molto interessante consi-de-rare il vettore che congiunge questo punto all'origine del piano, poiché esso individuerà univocamente il numero. Se ρ è il modulo (cioè la lunghezza) del vettore $\mathbf{z}$, esso può essere riscritto per mezzo di a e di b, che sono le sue componenti; per il *Teorema di Pitagora* si ha:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{15}$$

[6] In tal senso sussiste una connessione tra il campo dei complessi e il piano reale: $\mathcal{C} \longleftrightarrow \Re^2$.

Essendo ϑ l'angolo tra il vettore $\mathbf{z}$ e il semiasse positivo dei reali (misurato secondo il senso antiorario), la parte reale e la parte immaginaria di $\mathbf{z}$ possono essere riscritte in funzione di ϑ:

$$a = \rho \cos \vartheta \ , \quad b = \rho \sin \vartheta \tag{16}$$

dunque

$$\mathbf{z} = a + ib = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \tag{17}$$

dove ρ è il modulo di $\mathbf{z}$ e ϑ il suo argomento. L'argomento di un numero complesso è definito come:

Definizione 10:

$$\vartheta = arg\mathbf{z} = \arctan \frac{b}{a} \tag{18}$$

con la opportuna (ed ovvia) scelta del quadrante a seconda dei segni di a e b.

Per $\rho = 0$, $arg\mathbf{z}$ non è definito.

4.2 La forma esponenziale

Sia $\mathbf{z} = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$; proviamo a riscrivere questo numero complesso sostituendo al seno e al coseno i loro sviluppi in serie di potenze. Ricordiamo che:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n \tag{19}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}(-1)^n \tag{20}$$

dunque

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix} \tag{21}$$

Questa e le seguenti sono le "famigerate" *Formule di Eulero*:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ , \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{22}$$

che permettono di esprimere un numero complesso in forma esponenziale; dunque

$$\mathbf{z} = |\mathbf{z}|e^{i\vartheta} \quad ; \tag{23}$$

e il complesso coniugato sarà dato semplicemente da:

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^* = |\mathbf{z}|e^{-i\vartheta} \quad . \tag{24}$$

4.3 La sfera di Riemann

Prendiamo il piano di Argand-Gauss e chiudiamolo a mo' di *mappatella*: otteniamo così la *sfera di Riemann*. Quest'immagine è molto significativa e tra poco vedremo perché. Intanto costruiamo la sfera in maniera formale. Si utilizza il metodo *stereografico*[7].

[7] Quello che si usa per fare le carte geografiche; nel caso delle carte geografiche si trasforma una sfera (la terra) in un piano, noi faremo l'inverso.

Nello spazio tridimensionale $\Re^3$ si introduca un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(\mathcal{O}, x_1, x_2, x_3)$ e si considerino il piano π individuato da x_1 e da x_2 e una sfera $\mathcal{S}$ di raggio 1 e di centro l'origine degli assi. Chiamiamo l'intersezione tra il semiasse positivo x_3^+ e la superficie di $\mathcal{S}$ Nord. Il punto Nord ha coordinate $\mathcal{N} = (0, 0, 1)$. Ora si colleghi ciascun punto $\mathcal{P}$ di π ad $\mathcal{N}$: il segmento $\overline{\mathcal{PN}}$ incontrerà $\mathcal{S}$ in un punto[8] $\mathcal{Q}$. Il punto $\mathcal{Q}$ è la proiezione stereografica di un numero complesso $\mathbf{z}$ sulla sfera di Riemann.

Proviamo a ricavare le coordinate di $\mathcal{Q}$ (x_1^q, x_2^q, x_3^q). Per fare ciò basta trovare l'equazione cartesiana della retta passante per $\mathcal{P}$ e per $\mathcal{N}$ e metterla a sistema con l'equazione di $\mathcal{S}$. Le coordinate di un generico punto $\mathcal{P}$ di π associato al numero complesso $\mathbf{z}_\mathcal{P}$ sono $(x_1^p, x_2^p, 0)$; chiameremo la retta passante per $\mathcal{P}$ e per $\mathcal{N}$ τ. L'equazione di τ (si calcola banalmente per mezzo di alcune considerazioni geometriche)

$$\tau : \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 & = 0 \\ x_1 - \beta x_3 + \beta & = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{cases} \alpha & \equiv x_2^p \\ \beta & \equiv -x_1^p \end{cases}$$

L'equzione di $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad . \tag{25}$$

Le coordinate di $\mathcal{Q}$, dunque, si ricavano dal sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & = 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 0 \\ x_1 - \beta x_3 + \beta & = 0 \end{cases}$$

quando si imponga $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1^q, x_2^q, x_3^q)$. Ciò che si ottiene risolvendo questo sistema è

$$x_1^q = \frac{2x_1^p}{(x_1^p)^2+(x_2^p)^2+1} \tag{26}$$

$$x_2^q = \frac{2x_2^p}{(x_1^p)^2+(x_2^p)^2+1} \tag{27}$$

$$x_3^q = \frac{(x_1^p)^2+(x_2^p)^2-1}{(x_1^p)^2+(x_2^p)^2+1} \tag{28}$$

e, poichè $|\mathbf{z}_\mathcal{P}| = (x_1^p)^2 + (x_2^p)^2$, $\Re e\mathbf{z}_\mathcal{P} = x_1^p$ e $\Im m\mathbf{z}_\mathcal{P} = x_2^p$, possiamo anche scrivere[9]

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{2\Re e\mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|^2+1} \\ x_2 & = \frac{2\Im m\mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|^2+1} \\ x_3 & = \frac{|\mathbf{Z}|^2-1}{|\mathbf{Z}|^2+1} \end{cases}$$

Dalle relazioni mostrate si può facilmente ottenere la forma che $\mathbf{z}$ ha in funzione delle coordinate di $\mathcal{Q}$; questa è

$$\mathbf{z} = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \tag{29}$$

Una nota sul perché della *mappatella*. Dalla costruzione che abbiamo fatto della sfera di Riemann segue facilmente che il punto $\mathcal{N}$ è la proiezione stereografica di tutti i punti che nel piano di Argand-Gauss sono all'infinito. Dunque la sfera di Riemann non è altro che una compattificazione del piano di Argand-Gauss in cui ∞ è un punto.

[8]Se $\mathcal{P}$ è interno al cerchio di centro l'origine degli assi e raggio 1, allora $\mathcal{Q}$ apparterrà alla semisfera inferiore.

[9]Omettiamo da qui in poi tutti gli apici q e p, per evitare di appesantire ulteriormente la notazione.

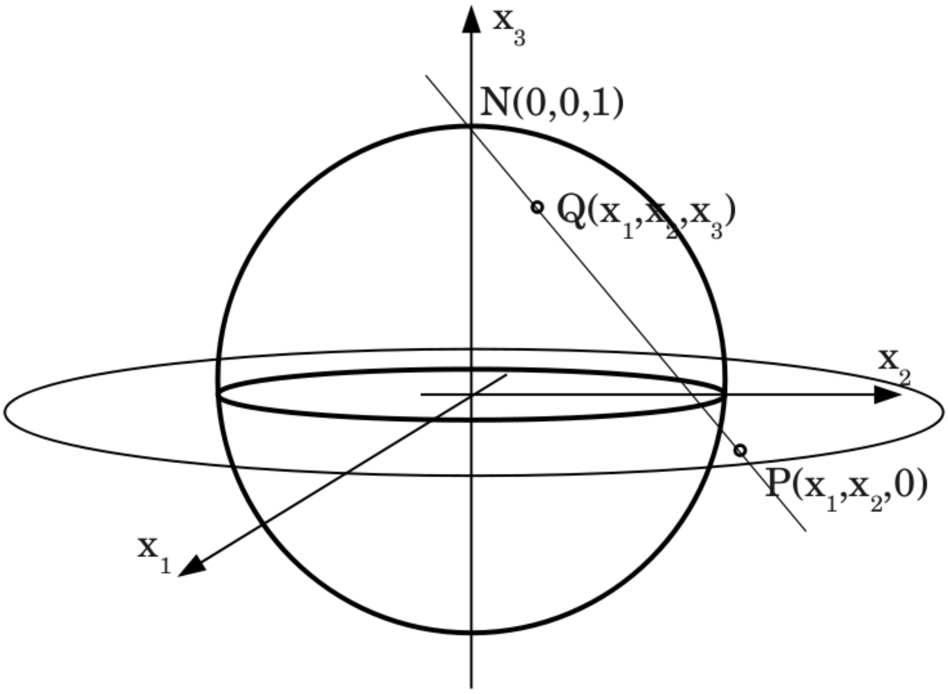

Figura 1: La sfera di Riemann