...Pro memoria dei passaggi principali per l'Equazione differenziale omogenea completa del Moto Armonico (caso generale: smorzato)

(solo la sequenza matematica senza particolari spiegazioni)

$$a\,\frac{d^2 f}{dt^2} + b\,\frac{df}{dt} + c f(t) = 0$$

$f(t) = \; e^{\lambda t}$ **soluzione** (basta sostituirla) se e solo se:

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ **(equazione caratteristica)**

Consideriamo il caso: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\lambda_1\,,\lambda_2 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\Gamma \pm i\,\Omega$ con $\Gamma = \frac{b}{2a}$ $\quad \Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

con dimensioni: $[\Gamma] = [\Omega] = [t]^{-1}$; la soluzione generale sarà allora:

$f(t) = \; e^{-\Gamma t}\left(c_1\, e^{i\Omega t} + c_2\, e^{-i\Omega t}\right)$ con $c_1\,, c_2 \in \mathcal{C}$ arbitrari, ma non completamente... infatti, imponendo che $f(t)$ abbia valori in $\mathcal{R} \implies c_1 = c\,,\; c_2 = c^*$ (come si dimostra facilmente). Dunque:

$f(t) = \; e^{-\Gamma t}\left(c\, e^{i\Omega t} + c^* e^{-i\Omega t}\right)$

$c = d_1 + i d_2 = \frac{2i}{2i}(d_1 + i d_2) = \frac{1}{2i}(-2d_2 + i2d_1) = \frac{1}{2i}(d_1' + i d_2') = \frac{1}{2i}\,\mathcal{A}\,e^{i\varphi_0}$

con d_1 e d_2 e quindi anche d_1' e d_2' $\in \mathcal{R}$ arbitrari,

e tali rimangono $\mathcal{A}$ e φ_0 (!), sempre da determinare imponendo le condizioni iniziali.

Allora

$$f(t) = \; e^{-\Gamma t}\mathcal{A}\,\frac{e^{i(\Omega t+\varphi_0)} - e^{-i(\Omega t+\varphi_0)}}{2i} = \mathcal{A}\,e^{-\Gamma t}\sin(\Omega t + \varphi_0)\ .$$

In particolare: $\Gamma = \frac{b}{2m}$ $\quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Gamma^2}$ (molla)

$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \Gamma^2}$ (pendolo)