Riflessioni e suggerimenti sui momenti

Munitevi (con il pensiero - "*gedankenexperiment*") di un filo e di un blocchetto (un bottone o un pezzetto di legno). Fate un buco (!) sul piano di un tavolo, ben levigato in modo che si possa considerare trascurabile l'attrito tra il blocchetto e il piano (orizzontale) del tavolo. Fate passare il filo nel buco e bloccatelo dall'altra parte. Date un colpo netto al blocchetto, dopo averlo legato saldamente all'estremità libera del filo, in modo da... imprimergli una certa velocità (quantità di moto, teorema dell'impulso?). Il moto sarà circolare e sarà uniforme (se trascuriamo tutti gli attriti). Calcolate il valore della tensione $|\vec{\tau}|$ del filo che è applicata al blocchetto. È l'unica forza effettiva che agisce sul blocchetto?

Ora, tirate lentamente il filo da sotto il tavolo, in modo che la sua lunghezza passi da l_1, iniziale, a l_2. Bloccate il filo nuovamente; quello che si è verificato durante il transiente è che il moto è stato vario, ma pur sempre generato dalla tensione $\vec{\tau}$ (o no?) che è andata variando in maniera sconosciuta; per poi di nuovo diventare circolare uniforme (con il nuovo raggio l_2). Il problema ora è individuare la nuova velocità di rotazione! Ammesso che ci crediate che continuerà a ruotare... (?!?)

Forse abbiamo bisogno di un nuovo strumento di indagine. E..., spesso, in fisica teorica, questo significa un nuovo strumento matematico. Ecco che ci viene in soccorso (diciamo così) il concetto di momento di una forza. La definizione vi è nota e, molto probabilmente, avete anche dimostrato che la grandezza significativa, a causa del seno, è la distanza del **polo** (il punto dello spazio, rispetto al quale è definito il momento) dalla retta di applicazione della forza: questa distanza, ovviamente definita positiva, si chiama **braccio**.

Dunque, che ce ne facciamo? Scriviamo, a partire dalla equazione del moto (il secondo principio della dinamica), quella che si chiama l'**equazione del momento**: basta moltiplicare primo e secondo membro "vettorialmente", a sinistra, per il vettore $\vec{OP}$ (da un punto O, fissato a piacere, al punto P dove è il corpo puntiforme su cui agiscono le forze). Otteniamo (attenzione che $\frac{d}{dt}\vec{OP} = \vec{v}$):

$$\vec{M}_O^{F_1} + \vec{M}_O^{F_2} + \vec{M}_O^{F_3} = \frac{d}{dt}\,\vec{L}_O\ ,$$

dove $\vec{L}_O = \vec{OP} \times m\vec{v}$ è il cosiddetto momento della quantità di moto o momento angolare.

[ATTENZIONE - per i volenterosi: a questo punto non sarebbe male se dedicaste una mezz'ora a studiare la rappresentazione in coordinate polari di un moto piano, per ora limitatamente all'espressione del vettore velocità, che ha componenti "polari" $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{\rho} + r\dot{\theta}\,\hat{\eta}$ (ad esempio nel paragrafo 2-14 del Rosati). Capireste cos'è che conta nel calcolo del momento angolare, avendo identificato il polo con l'origine degli assi di riferimento. Nel caso semplice di un moto circolare il modulo del momento angolare è $|\vec{L}_O| = mr^2|\omega|$].

Perché nel nostro caso diventa importante l'equazione del momento? (E infatti dobbiamo abituarci a pensare ad essa in maniera assolutamente naturale). Perché, qualunque cosa noi facciamo al filo, tirandolo o allentandolo attraverso il buco, esso, di fatto, trasmette semplicemente la forza $\vec{\tau}$ al corpo, e questa è l'unica forza che ci interessa, l'unica che sopravvive nella equazione del moto. Ma se scegliamo il punto O coincidente con il foro nel tavolo, ebbene non c'è dubbio che il momento di $\vec{\tau}$ rispetto a O è nullo! Sempre! Dunque si conserva il momento angolare!!! Vi sembra inutile? Non ne capite l'importanza? Provate allora a rispondere alla domanda iniziale: quale sarà la nuova velocità del moto circolare, con il raggio l_2?

La conservazione del **momento angolare** è l'altro importantissimo principio di conservazione della meccanica, assieme a quello della **quantità di moto** (e naturalmente a quello dell'**energia**).

A questo punto, vi suggerisco di esercitarvi ad applicare l'equazione del momento al pendolo semplice. È estremamente istruttivo (e... ultimamente lo stiamo chiedendo spesso all'orale). Naturalmente, nel caso del pendolo semplice, **non** c'è conservazione del momento angolare, ma se riuscirete a non confondervi con i segni (ecco perché è un buon esercizio) ritroverete l'equazione nota del pendolo semplice.

La gravitazione universale

Poniamo l'origine del sistema di riferimento nel centro di un... corpo celeste (terra, sole). Oppure, per maggiore semplicità iniziale, facciamo come abbiamo fatto quando abbiamo calcolato e disegnato per punti l'orbita di un pianeta, cioè consideriamo un punto dello spazio in cui sia concentrata (e ferma) un'enorme massa. Questo punto (origine del sistema di riferimento) è il centro di un **"campo"** di forza (gravitazionale). Abbiamo considerato questa situazione quando abbiamo dimostrato che la forza gravitazionale è conservativa e, contestualmente, abbiamo calcolato l'energia potenziale gravitazionale (questo argomento è molto importante, viene chiesto spesso all'orale, se qualcuna/o pensa di non saperlo o avere dubbi, PROVVEDA!). Un qualunque corpo (puntiforme), immerso nel campo gravitazionale, si muove sottoposto alla forza del campo (unica forza ad agire su di esso).

Scriviamo l'equazione del momento, rispetto al centro O. Il momento è nullo! Dunque, **si conserva il momento angolare**: il vettore $\vec{L}_O$ è un vettore **costante** nel tempo. Innanzi tutto è costante in direzione e verso, e allora il moto non può che essere **piano** (DIMOSTRARE). Poi, è costante in modulo, ma quanto vale il modulo?

$$|\vec{L}_O| = m\,(r(t))^2\,\frac{d\theta}{dt}\ ;$$

ma questa, a meno di una costante numerica ($2m$), è proprio la velocità areolare (si vede facilmente facendo un buon disegno) e si dimostra così la **seconda legge di Keplero**!

(...e fermiamoci per ora qui)