# Il vettore ruotante e il moto circolare

## 1 Il vettore ruotante

Siamo in 2 dimensioni. Un vettore ruotante è un qualunque vettore, in un piano, che varia nel tempo mantenendo costante il suo modulo. Può essere, opportunamente, trasportato parallelamente e applicato ad uno stesso punto $O$ in modo da osservare la sua rotazione come se fosse una lancetta.

Allora, disegniamo due figure che rappresentano rispettivamente una rotazione di un vettore, $\vec{A}(t)$, in senso antiorario ($\Delta\phi > 0$) ed una rotazione in senso orario ($\Delta\phi < 0$). La considerazione di entrambe le rotazioni non è indispensabile: ci si può limitare, qui come nel paragrafo successivo, alla sola rotazione antioraria per non rischiare di confondersi; la rotazione in senso orario è presentata per una ragione di completezza e per far vedere a chi ne avesse la curiosità che i risultati non cambiano, quest'ultima è un po' più difficile.

Da queste figure si può vedere come vengono introdotte le varie grandezze in gioco: in particolare, avendo individuato i vettori $\Delta\vec{A}$ nei due casi e i loro versi, bisogna fare attenzione ai due versori, $\hat{n}'$ e $\hat{n}$, che hanno il primo la direzione del vettore $\Delta\vec{A}$ e il secondo della perpendicolare al vettore $\vec{A}(t)$ all'istante $t$, ma puntano sempre dalla parte antioraria (convenzionalmente positiva), in modo che sia il segno di $\Delta\phi$ (e poi, nel limite, di $\omega$) a determinare i versi di $\Delta\vec{A}$ e di $\frac{d\vec{A}}{dt}$ (come si capirà immediatamente):

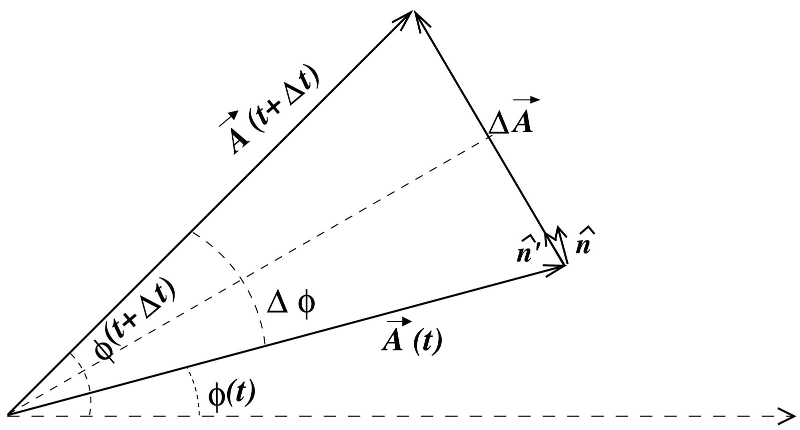


Figura 1: rotazione antioraria, $\Delta\phi > 0$.

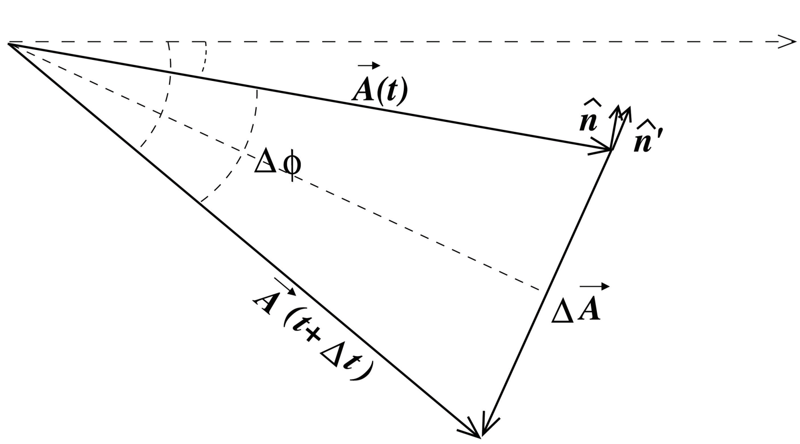


Figura 2: rotazione oraria, $\Delta\phi < 0$.

Vogliamo ora considerare il rapporto incrementale $\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$. Possiamo allora scrivere (nell'ultimo passaggio moltiplichiamo e dividiamo per $\Delta\phi$):

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\; 2\; \left|\vec{A}\right|\; \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\; \hat{n}' = \left|\vec{A}\right|\; \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\; \frac{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\frac{\Delta\phi}{2}}\; \hat{n}' \;;$$

in questa espressione il versore $\hat{n}'$ è relativo all'intervallo $\Delta t$ mentre il versore a cui esso tende, nel limite per $\Delta t \to 0$, è $\hat{n}$ (relativo all'istante $t$).

Dunque, passando al $\lim_{\Delta t\to 0}$ si ha (dal momento che $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \dot{\phi} = \omega$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \left|\vec{A}\right|\; \omega(t)\; \hat{n}(t)\;. \tag{1}$$

E il verso è dato, ripetiamo, dal segno di $\omega$.

Possiamo applicare questo risultato a qualunque vettore che vari nel tempo mantenendo costante il proprio modulo.

E allora passiamo a considerare il moto circolare in un piano (con assi cartesiani $x - y$).

# 2 Il moto circolare

La traiettoria di un moto circolare è un arco di una circonferenza di raggio $R$ e centro in un punto, nel quale poniamo l'origine $O$ di un sistema di assi cartesiani ortonormali $x - y$.

È importante capire subito perché si parla di arco e non di circonferenza: infatti, si consideri l'esempio notevole del moto di un "pendolo semplice", esso **è circolare**, ma si svolge su una traiettoria che è un arco di circonferenza (appartenente ad un piano verticale, di raggio uguale alla lunghezza $l$ del filo).

Dunque, il vettore posizione $\vec{r}(t)$, allo scorrere del tempo, punta sul corpo materiale puntiforme che si muove sulla circonferenza. Sulla circonferenza viene introdotta, in maniera naturale e indipendente dal moto, un'ascissa curvilinea "$s$" con origine, ad esempio, nel punto d'intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle $x$ e con verso positivo quello antiorario; lo stesso semiasse positivo delle $x$ è anche l'asse di riferimento per misurare gli angoli al centro, $\varphi$, corrispondenti. Insieme all'ascissa curvilinea è ben definito, in ogni punto della circonferenza, il versore tangente $\hat{t}$, e i due versi sono concordi.

Sussiste questa semplice relazione tra ascissa e angolo (misurato in radianti):

$$s = R\,\varphi\;;$$

e allora la legge oraria del corpo **sulla traiettoria** sarà espressa indifferentemente da $s(t)$ o da $\varphi(t)$, risultando:

$$s(t) = R\,\varphi(t)\;.$$

Avremo allora, per successive derivazioni rispetto al tempo, le relazioni tra la velocità scalare e quella angolare, tra l'accelerazione scalare e quella angolare:

$$\begin{aligned} v_s(t) &\equiv \dot{s}(t) = R\,\dot{\varphi}(t) \equiv R\,\omega(t) \\ a_s(t) &= \ddot{s}(t) = R\,\ddot{\varphi}(t) = R\,\dot{\omega}(t)\;. \end{aligned}$$

Se si parla di un moto circolare uniforme, sappiamo che:

$$a_s = 0 \qquad v_s(t) = v\;\;\text{(costante)} \qquad s(t) = s_0 + v\,t\;;$$

e se si parla di un moto circolare uniformemente accelerato, sappiamo che:

$$a_s(t) = a \ \text{(costante)} \qquad v_s(t) = v_0 + a\,t \qquad s(t) = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2\ .$$

Il moto circolare ha la caratteristica di essere periodico e l'ascissa $s$, ad ogni passaggio per l'origine, si incrementa (o decrementa) di $2\pi\,R$.

A questo punto possiamo chiederci: qual è l'evoluzione temporale del vettore posizione, $\vec{r}(t)$? Si tratta di un vettore ruotante! E la sua derivata rispetto al tempo, che è il vettore velocità $\vec{v}(t)$, sarà data da:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\,\omega(t)\,\hat{n} = v_s(t)\,\hat{t}\ ;$$

nella relazione appena scritta c'è una completa coincidenza tra il versore $\hat{n}$ così come è stato definito nel paragrafo precedente e il versore $\hat{t}$. La velocità scalare $v_s(t)$ è la componente del vettore $\vec{v}(t)$ sulla retta tangente alla circonferenza (orientata in accordo con il verso antiorario).

Se il moto è circolare uniforme anche il vettore $\vec{v}(t)$ è un vettore ruotante ed esso ruota nel tempo con un angolo $\varphi(t) \pm \pi/2$, cioè l'angolo $\varphi(t)$ aumentato o diminuito di un angolo retto rispetto ad $\vec{r}(t)$. Possiamo passare, allora, alla sua derivazione rispetto al tempo direttamente, utilizzando nuovamente la (**??**) con la stessa velocità angolare. Nella figura 3 sono rappresentati sia un moto in verso antiorario che uno in verso orario (e le velocità vettoriali sono trasportate anche nell'origine e ruotano come se fossero rigidamente connesse ai vettori posizione, quindi con la stessa velocità angolare):

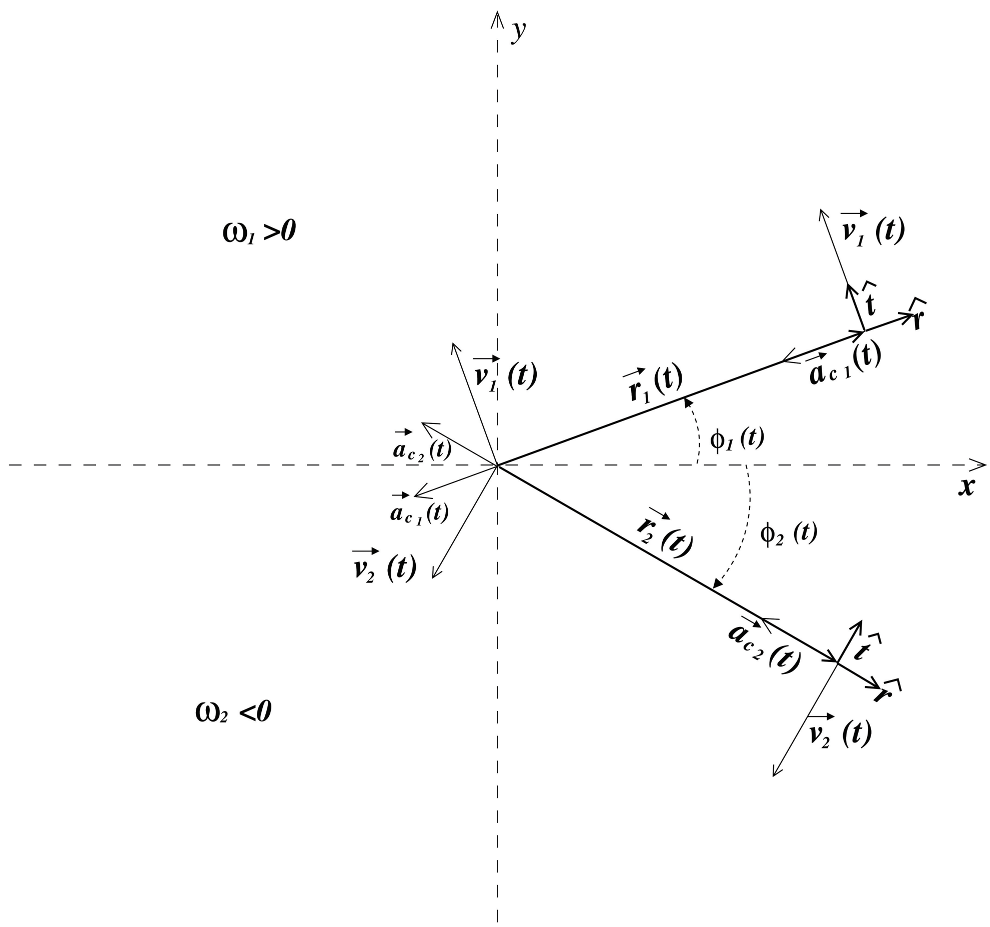


Figura 3: moto circolare uniforme con velocità angolare positiva o negativa.

Ci si rende conto, facilmente nel caso antiorario e con un po' di difficoltà in più nel caso orario, che si ottiene lo stesso risultato:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}_c(t) = -R\,\omega^2\,\hat{r}(t) \; .$$

Questa è la **accelerazione centripeta** (sempre presente in qualunque moto circolare). Possiamo ottenere questo risultato anche derivando il vettore velocità scritto precedentemente, utilizzando la regola della derivazione del prodotto di due funzioni (di cui una vettoriale):

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_s}{dt}\,\hat{t} + v_s\,\frac{d\hat{t}(t)}{dt} &= \text{(con } v_s \text{ costante il primo termine è nullo)} = \\ &= -R\,\omega^2\,\hat{r}(t) \; ,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato che $v_s = R\,\omega$ e che la derivata del versore tangente (che è un vettore ruotante di modulo 1) è sempre data da:

$$\frac{d\hat{t}(t)}{dt} = -\omega\,\hat{r}(t) \; .$$

Il caso del moto circolare uniformemente accelerato e il caso generale (vario) sono casi per i quali compare anche la componente tangenziale del vettore accelerazione (che coincide con l'accelerazione scalare):

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(v_s(t)\,\hat{t}(t)\Big) = \\ &= \frac{dv_s(t)}{dt}\,\hat{t}(t) + v_s(t)\,\frac{d\hat{t}(t)}{dt} = \\ &= \vec{a}_t(t) + \vec{a}_c(t) = \underbrace{a_s(t)}_{=\ddot{s}(t)}\,\hat{t}(t) - R\,\omega^2(t)\,\hat{r}(t) \; .\end{aligned}$$

Nel caso del moto circolare uniformemente accelerato la componente tangenziale ha modulo costante mentre quella centripeta ha modulo che varia quadraticamente col tempo. Si può esaminare una utile presentazione con diagrammi vettoriali a intervalli successivi, sulla stessa pagina-web dove è presente questa nota, all'indirizzo:

“ *http://people.na.infn.it/clarizia/Accelerazione.pps* ”,

nella quale si vede l'evoluzione delle due componenti.

Non rimane che fare un esercizio **assai utile**, che viene lasciato e vivamente consigliato al lettore, quello di scrivere le componenti cartesiane del vettore $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = R\,\cos\left(\varphi(t)\right)\,\hat{\imath} + R\,\sin\left(\varphi(t)\right)\,\hat{\jmath} \; ,$$

ed ottenere velocità ed accelerazione derivando le componenti, nei due casi notevoli di moto uniforme ed uniformemente accelerato. Dall'esame attento dei vari termini e dall'associazione di questi con quanto già visto qui in forma intrinseca, si otterrà una comprensione più approfondita delle grandezze fondamentali di questi moti.