# Piccola rassegna di Algebra delle Matrici

## 1 Introduzione

Questa nota va intesa semplicemente come un brevissimo sommario di alcuni concetti relativi alle Matrici, che dovete utilizzare nell'ambito dello studio dei Vettori.

Si definisce Matrice un insieme ordinato di numeri (reali, ma più in generale complessi), detti elementi, allineati in $m$ righe ed $n$ colonne (matrice *rettangolare* $m \times n$; se $m = n$ la matrice è detta *quadrata*). Così, quelle che seguono sono tutte matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 3 & -8 & 12 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -4i & 8i \\ -2i & 12 \end{pmatrix}$$

e ancora

$$E = \begin{pmatrix} 3i & 0 & 4 \\ i-1 & -3+5i & 0 \\ 6i & 4 & 1+3i \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

In questi esempi la matrice $A$ ha "dimensioni", o anche "ordine"(righe $\times$ colonne) di $2 \times 2$, $B$ di $5 \times 1$ (matrice colonna), $C$ di $1 \times 6$ (matrice riga), $D$ di $3 \times 2$, $E$ di $4 \times 3$, $F$ di $3 \times 3$ e $G$ di $2 \times 2$.

In generale, potremo avere:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dove il primo indice sta ad indicare la riga e il secondo la colonna. Le matrici di solito vengono indicate con una lettera maiuscola, spesso circondata da una doppia stanghetta (come $\|A\|$) e gli elementi sono scritti spesso usando lettere minuscole con indici (gli elementi di $\|A\|$ sono scritti $a_{ij}$).

Se tanto $m$ che $n$ sono eguali ad 1, quella matrice è chiamata uno scalare (con il noto significato di scalare) e se soltanto $m$ o soltanto $n$ sono eguali ad 1, quella matrice può esser chiamata un vettore. Così nell'esempio mostrato sopra, $B$ e $C$ sono vettori; in alcuni testi il primo può essere detto vettore colonna e il secondo vettore riga. Una matrice quadrata con elementi 1 sulla diagonale e 0 negli elementi fuori diagonale (come la matrice $F$ dell'esempio) viene chiamata matrice "unità"o matrice "identità", e una matrice con tutti gli elementi eguali a 0 è chiamata matrice "zero".

Due matrici sono dette eguali solo se esse hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne e se ogni elemento di una ha lo stesso valore del corrispondente elemento dell'altra.

Ma, matrici, vettori (e poi tensori) sono la stessa cosa? Non esattamente. Spesso i vettori e i tensori sono rappresentati mediante delle matrici, ma è importante capire bene che le matrici rappresentano le *componenti* di un vettore o di un tensore, e che quelle componenti hanno significato solo quando associate a dei vettori di base di un particolare sistema di coordinate. Dal momento che i vettori di base non sono sempre mostrati, può andar bene pensare ad una matrice come rappresentativa di un vettore o di un tensore in sé, ma fintantoché si abbia ben chiaro che il vettore o tensore reale ha un'esistenza indipendente da un qualsiasi sistema di coordinate.

# 2 Addizione di matrici, moltiplicazione per uno scalare e sottrazione

Le matrici possono essere addizionate solo se hanno le stesse dimensioni (egual numero, $m$, di righe ed egual numero, $n$, di colonne). L'addizione viene eseguita semplicemente addizionando ciascun elememto di una matrice con il corrispondente elemento dell'altra. Per esempio:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

o in generale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \quad .$$

Ovviamente il risultato è una matrice con le stesse dimensioni. L'addizione di matrici ha la proprietà commutativa, così $\|A\| + \|B\| = \|B\| + \|A\|$.

La moltiplicazione di una matrice per uno scalare è semplice: moltiplicate ciascun elemento della matrice per lo scalare.

Si possono usare queste due operazioni per ottenere immediatamente che la sottrazione di matrici si esegue sottraendo gli elementi corrispondenti. Naturalmente le dimensioni devono essere le stesse. Una combinazione lineare sarà dunque:

$$k\|A\| + h\|B\| = \begin{pmatrix} ka_{11}+hb_{11} & ka_{12}+hb_{12} \\ ka_{21}+hb_{21} & ka_{22}+hb_{22} \end{pmatrix}$$

con $k$ e $h$ due scalari.

# 3 Moltiplicazione di matrici

Possono essere introdotti alcuni modi diversi per moltiplicare le matrici; ma il più comune è quello di moltiplicare le due matrici ($A$ e $B$) moltiplicando gli elementi di ciascuna riga $\{i\}$ di $A$ per gli elementi di ciascuna colonna $\{j\}$ di $B$ e poi sommando i risultati a costituire così l'elemento $\{ij\}$ della matrice prodotto. Così, se la matrice $A$ è data da

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

e la matrice $B$ è data da

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

allora il prodotto di $A$ per $B$ è dato da

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix} \quad .$$

Naturalmente, questo tipo di moltiplicazione, detto “righe per colonne”, funziona solo se il numero di colonne della prima matrice, $n^A$, è eguale al numero di righe della seconda matrice, $m^B$ (3 e 3 nel caso dell’esempio); e la matrice che si ottiene come risultato ha il numero di righe della prima matrice e il numero di colonne della seconda, cioè $m^A \times n^B$. Si vede subito che, se abbiamo intenzione di invertire l’ordine del prodotto, in generale non è proprio possibile moltiplicare la matrice $B$ per la matrice $A$, a meno che non sia $n^A = m^B$ ed $n^B = m^A$: in quest’ultimo caso si ottengono, dalla moltiplicazione, due matrici entrambe quadrate, ma di dimensioni diverse, a meno che non siano quadrate le due matrici, $A$ e $B$, di partenza (e ovviamente delle stesse dimensioni). In quest’ultimo caso, le due matrici che si ottengono da $A \times B$ e da $B \times A$ possono essere, sì, confrontate, ma, in generale, non saranno eguali: dunque, nel mondo delle matrici la moltiplicazione non è commutativa.

Un’altra differenza significativa tra la moltiplicazione delle matrici e la moltiplicazione dei numeri è che si può ottenere zero come risultato della moltiplicazione di due matrici anche se nessuna delle due matrici è zero. Per esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Studiando i vettori, è piuttosto probabile imbattersi nella moltiplicazione di una matrice (quadrata) per un vettore colonna ottenendo come risultato un vettore colonna. Ad esempio, nel caso del cambiamento per rotazione del sistema di riferimento cartesiano ortogonale, i vettori si trasformano dal vecchio al nuovo riferimento mediante una matrice. Vediamo prima il caso a 2 dimensioni (questo è il caso trattato esplicitamente nella nota di R. Figari, vers. ridotta, a pag. 11) e quindi con $m = n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\imath}' \cdot \hat{\imath} & \hat{\imath}' \cdot \hat{\jmath} \\ \hat{\jmath}' \cdot \hat{\imath} & \hat{\jmath}' \cdot \hat{\jmath} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_2 \\ \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad ;$$

dove sono indicati i prodotti scalari tra i versori di base dei due sistemi cartesiani. La matrice che opera la rotazione è data in questo caso semplice da questa matrice (come si ottiene facilmente):

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_2 \\ \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad ,$$

dove $\theta$ è l’angolo di cui è ruotato il nuovo sistema $x' - y'$ rispetto al sistema $x - y$.

Nel caso a 3 dimensioni la matrice di rotazione è analogamente ottenuta moltiplicando scalarmente i tre versori di base:

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_3 \\ \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_3 \\ \hat{x}'_3 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}'_3 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}'_3 \cdot \hat{x}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad ;$$

e qui le tre righe della matrice rappresentano, ciascuna, i tre coseni direttori dei tre nuovi assi coordinati rispetto ai vecchi assi.

La moltiplicazione di matrici è associativa e distributiva rispetto all'addizione; così per matrici $A$, $B$ e $C$

$$(AB)C = A(BC)$$

e

$$A(B + C) = AB + AC$$

purché ci si ricordi di non invertire l'ordine di nessun prodotto.

# 4 Matrice trasposta e Traccia di una matrice

La matrice trasposta di una data matrice è quella che si ottiene scambiando le righe con le colonne di quella matrice. Questa si indica con un apice $^T$, per cui la trasposta della matrice $A$ si indica con $A^T$. Se gli elementi di $A$ sono $a_{ij}$ gli elementi di $A^T$, scriviamoli $(A^T)_{ij}$, sono dati da $a_{ji}$, cioè con gli indici scambiati.

La trasposta della matrice che è il prodotto di due matrici è la matrice che si ottiene moltiplicando la trasposta della seconda per la trasposta della prima, cioè invertendo l'ordine del prodotto:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

ammesso, ovviamente, che le dimensioni delle matrici permettano di eseguire tali prodotti.

Per Matrici quadrate, la Traccia della matrice è data dalla somma degli elementi della diagonale principale. La Traccia della matrice $A$ si indica $Tr(A)$. Cosicché, se la matrice $A$ è una matrice $4 \times 4$ con elementi $a_{ij}$, la Traccia di $A$ è data da

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} \quad .$$

# 5 Determinante, minori e complementi algebrici di una matrice

Il determinante di una Matrice quadrata è uno scalare che si calcola moltiplicando, sommando e sottraendo gli elementi di una matrice. Se $A$ è una matrice $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

il Determinante di $A$ (indicato usando le stanghette verticali ai due lati di $A$) è dato da:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad .$$

Ad esempio, se $A$ è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

il determinante di $A$ è

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (-2)(3) = 10 \quad .$$

Per trovare il determinante di matrici di ordine superiore, bisogna usare i "minori" e i "complementi algebrici" del determinante della matrice. Il minore di ciascun elemento del determinante di una matrice quadrata si ottiene eliminando l'intera riga e l'intera colonna in cui appare quell'elemento e poi scrivendo gli elementi rimanenti come un nuovo determinante con un numero di righe e colonne ridotto di uno. Così per il determinante della matrice $3 \times 3$ $A$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

il minore dell'elemento $a_{11}$ è

$$\begin{vmatrix} - & - & - \\ - & a_{22} & a_{23} \\ - & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad .$$

Allo stesso modo, il minore dell'elemento $a_{12}$ si ottiene eliminando la riga 1 e la colonna 2, in cui $a_{12}$ appare:

$$\begin{vmatrix} - & - & - \\ a_{21} & - & a_{23} \\ a_{31} & - & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad .$$

Prima di poter usare i minori per trovare il determinante di una matrice di ordine superiore, bisogna farli diventare dei "complementi algebrici". Il complemento algebrico di un elemento $a_{ij}$ è il minore di quell'elemento moltiplicato per $(-1)^{(i+j)}$:

$$\text{Comp. alg. di } (a_{ij}) = (-1)^{(i+j)} \text{ Minore di } (a_{ij}) \quad .$$

Quindi per i minori mostrati sopra si ha che il complemento algebrico dell'elemento $a_{11}$ sarà eguale al minore (moltiplicato per $+1$) e che il complemento algebrico dell'elemento $a_{12}$ sarà invece eguale al minore moltiplicato per $-1$.

Il determinante di una matrice $3 \times 3$ si ottiene scegliendo una qualsiasi riga o colonna della matrice e calcolando la somma dei prodotti di ogni elemento per il proprio complemento algebrico. Ad esempio, per calcolare il determinante $|A|$, si può scegliere la prima riga ed ottenere:

$$|A| = a_{11}(\text{Comp. alg. di } a_{11}) + a_{12}(\text{Comp. alg. di } a_{12}) + a_{13}(\text{Comp. alg. di } a_{13}) =$$

$$= a_{11}(1)(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-1)(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad .$$

Il valore del determinante sarebbe lo stesso se si usasse una riga differente o una colonna (ma per la dimostrazione si rimanda al corso di Algebra Lineare).

Allo stesso modo si trova il determinante di una matrice $4 \times 4$ e di matrici di ordine superiore, riconducendosi alla fine al livello $2 \times 2$, ma nel corso di Meccanica e Termodinamica non ne avremo bisogno.

Utili proprietà dei determinanti sono che il determinante della matrice trasposta di una matrice è eguale al determinante della matrice (cioè $|A^T| = |A|$) e che il determinante del prodotto di due matrici è eguale al determinante del prodotto invertito delle due matrici (cioè $|AB| = |BA|$), sempre che le dimensioni delle due matrici consentano l'esecuzione di entrambi i prodotti. Inoltre, una proprietà molto importante è che se una matrice ha identiche due righe o colonne, o se una riga o colonna è un multiplo intero di un'altra riga o colonna, il determinante risulta essere zero.