VETTORI

appunti di Rodolfo Figari

PROTOTIPO DI VETTORE : LO SPOSTAMENTO

Fissato un punto nello spazio consideriamo l'insieme dei segmenti uscenti dal punto scelto. Chiameremo spostamento un qualunque elemento di questo insieme.

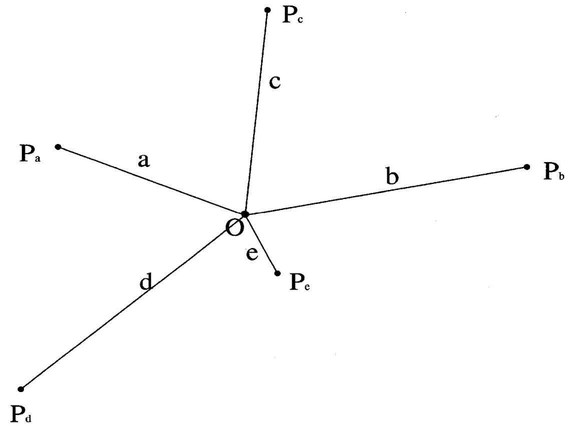


Figura n.1

In figura è sottolineata la corrispondenza tra l'insieme degli spostamenti e l'insieme dei punti dello spazio. <u>Fissata l'origine degli spostamenti</u> , ad ogni segmento è associato il suo punto finale e viceversa. La descrizione dell'insieme degli spostamenti sarà dunque anche una descrizione dell'insieme delle posizioni dei punti dello spazio.
Nella definizione dell'insieme degli spostamenti il punto origine non avrà alcuna rilevanza: ogni segmento indica solo "verso dove" e "quanto lungo" è stato lo spostamento e non "da dove " è iniziato. In altri termini due spostamenti da punti diversi saranno considerati identici se si possono ottenere uno dall'altro per spostamento parallelo. (È chiaro però che la corrispondenza che ad ogni segmento associa il suo punto finale cambia al cambiare dell'origine; questo è quanto il testo sottolineato voleva far notare)

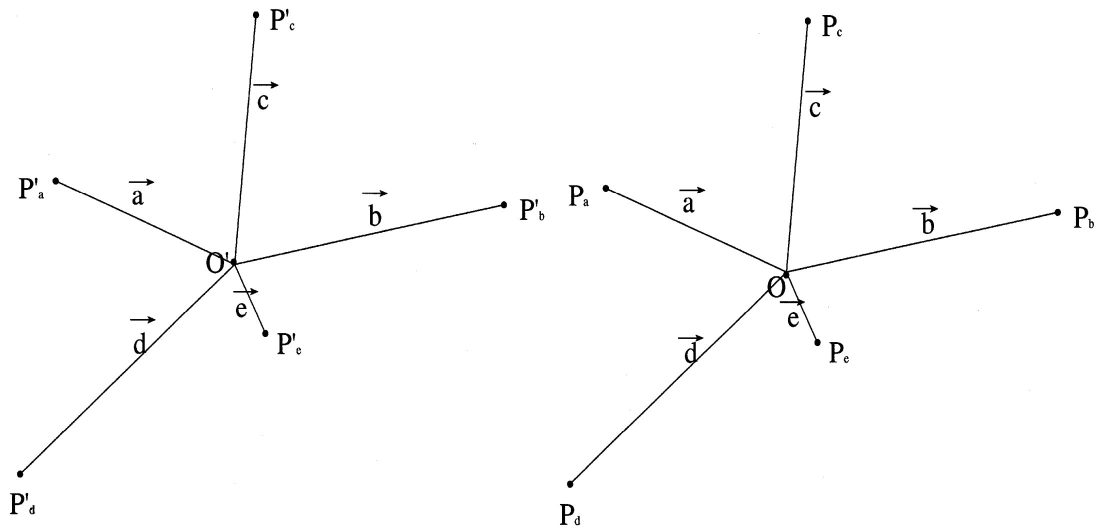
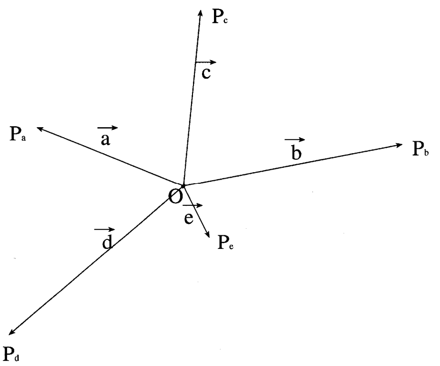


Figura n.2

Spesso considereremo il sottoinsieme degli spostamenti piani, cioè l'insieme dei segmenti giacenti su un piano ed uscenti da un medesimo punto origine.

Un elemento generico dell'insieme sarà indicato con lettere, sormontate da una freccia ($\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, etc). La freccia sottolinea che gli spostamenti si intendono orientati; ciascuno "parte" dall'origine e "termina" all'altro estremo. Per sottolineare questo aspetto una freccia comparirà spesso



sull'estremo del segmento anche nella rappresentazione grafica dello spostamento.

Figura n.3

Torneremo successivamente sul problema di come dare univocamente "un nome" a ciascuno spostamento. La lunghezza di ciascuno spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ verrà denotata con $|\vec{\mathbf{a}}|$.

Considerazioni sulla definizione:

Prima di iniziare la costruzione della struttura algebrica dell'insieme degli spostamenti vogliamo fare una breve digressione sul problema del rapporto tra modello matematico e realtà. Si noti che
- nella definizione di spostamento abbiamo fatto uso di enti geometrici "astratti" come rette, punti e segmenti
- lo spostamento non è stato associato alla sua origine . Ogni origine e gli spostamenti intorno ad essa sono equivalenti per costruzione.

L'insieme appena definito, munito della struttura algebrica e metrica che in seguito gli assoceremo, verrà utilizzato per descrivere e confrontare spostamenti di oggetti reali, in regioni diverse dello spazio che ci circonda. Questa corrispondenza tra mondo fisico e modello matematico sarà priva di ambiguità solo se possediamo la capacita' operativa di:
- individuare la posizione di "punti" con precisione, in principio, illimitata;
- tracciare concretamente segmenti di retta tra due punti qualunque (la linea più breve che li congiunge) e misurarne la lunghezza,
- condurre parallele ad un segmento dato a partire da un qualunque punto esterno al segmento stesso e possedere un metodo di misurazione delle lunghezze che sia indipendente dalla regione (dell'universo) in cui ci troviamo;
- verificare che i "segmenti fisici" così tracciati possiedano le proprietà che via via andremo ipotizzando per gli spostamenti.

Notiamo però che, ad esempio, l'esistenza di un unico segmento di retta tra due punti comunque assegnati, o l'esistenza di un'unica parallela ad una retta data, passante per un punto esterno alla retta, assieme a molte altre proprietà geometriche e metriche che assumeremo valide per gli spostamenti, sono assiomi della geometria euclidea (o loro conseguenze), verosimilmente ma non necessariamente proprietà' dei segmenti che concretamente sappiamo tracciare !!

Sebbene appaiano ben verificate sulla scala dei nostri laboratori (diciamo sulla scala del sistema solare) è ormai noto che le rette reali hanno proprietà che si discostano da quelle delle rette "euclidee" su scale di distanza estremamente grandi o estremamente piccole e/o in presenza di forti campi gravitazionali. Torneremo su questo punto in seguito.

Perché non si generi confusione con il significato corrente della parola spostamento, si noti che la definizione non fa riferimento ad una traiettoria realmente percorsa; quando si parlerà di spostamento di un corpo puntiforme, avvenuto tra due istanti di tempo, si farà riferimento solo al segmento di retta che congiunge la sua posizione iniziale con la sua posizione finale.

OPERAZIONI SULL'INSIEME DEGLI SPOSTAMENTI

Somma: dati due spostamenti $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ si definisce loro somma lo spostamento che si ottiene operando il secondo spostamento a partire dal punto finale del primo. In altre parole lo spostamento somma $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ è la diagonale del parallelogramma costruito sui segmenti $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$.

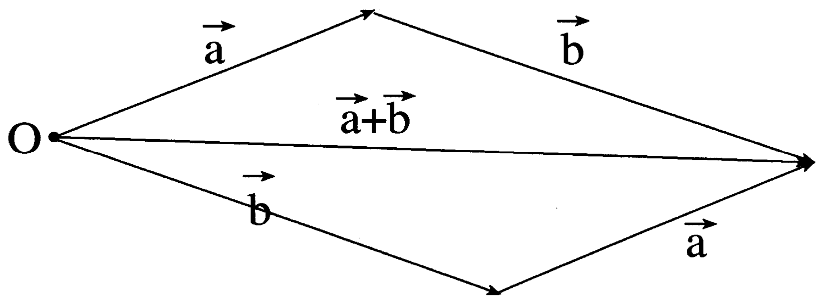


figura 4

Per costruzione $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ (commutatività);
Si verifica che $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$ (associatività).

Lo spostamento nullo è quello di lunghezza 0 :

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{a}}$$

Per ogni spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ esiste lo spostamento opposto $-\vec{\mathbf{a}}$ che sommato ad $\vec{\mathbf{a}}$ da lo spostamento nullo

$$\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

Il segmento $-\vec{\mathbf{a}}$ appartiene alla stessa retta di $\vec{\mathbf{a}}$, ha la stessa lunghezza, ma verso opposto a quello di $\vec{\mathbf{a}}$.

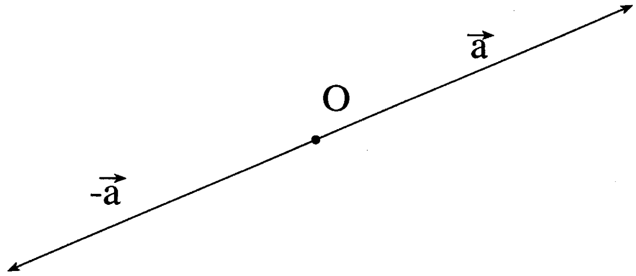


figura 5

Per definizione si pone $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}})$. Come si vede chiaramente dalla figura lo spostamento differenza $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ coincide con il segmento che congiunge l'estremo di $\vec{\mathbf{a}}$ con l'estremo di $\vec{\mathbf{b}}$ e sommato ad $\vec{\mathbf{a}}$ dà $\vec{\mathbf{b}}$.

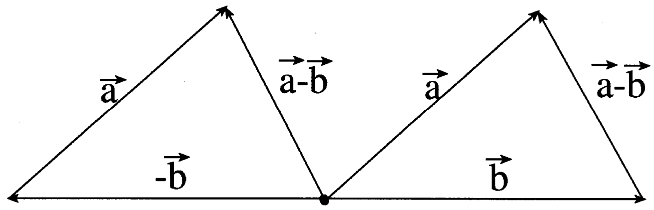


figura 6

<u>Prodotto per uno scalare</u> : per ogni numero reale α e per ogni spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ definiamo lo spostamento $\alpha\vec{\mathbf{a}}$ (α volte lo spostamento $\vec{\mathbf{a}}$) come il segmento che sta sulla stessa retta di $\vec{\mathbf{a}}$, ha lunghezza $|\alpha||\vec{\mathbf{a}}|$ nello stesso verso di $\vec{\mathbf{a}}$ se α è positivo nel verso di $(-\vec{\mathbf{a}})$ se α è negativo. In particolare $-\vec{\mathbf{a}} = (-1)\vec{\mathbf{a}}$.

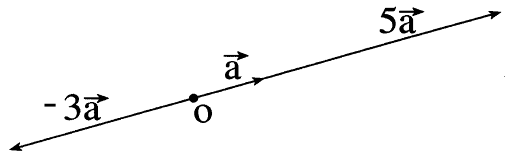


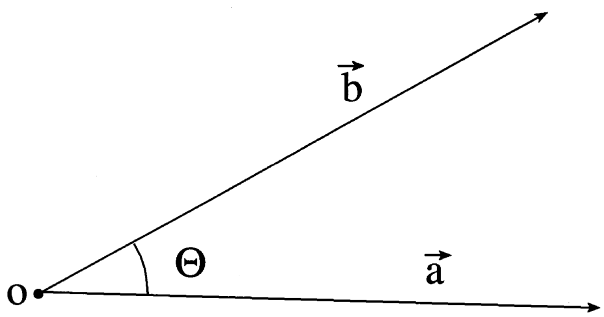
figura 7

Verificare che $\alpha(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \alpha\vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{b}}$ (distributività del prodotto per uno scalare rispetto alla somma).

Si dice versore di uno spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ lo spostamento $\hat{\mathbf{a}}$ di lunghezza unitaria lungo la stessa retta e nello stesso verso di $\vec{\mathbf{a}}$; dalle definizioni precedenti :

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{1}}{|\vec{\mathbf{a}}|}\vec{\mathbf{a}}.$$

<u>Prodotto scalare</u>: dati due spostamenti $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ si definisce loro prodotto scalare il <u>numero</u> $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ (non è dunque un'operazione interna all'insieme degli spostamenti) che si ottiene moltiplicando la lunghezza del primo per la lunghezza del secondo per il coseno dell'angolo che formano



$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\theta$$

figura 8

Si noti che risulta irrilevante per la definizione scegliere un verso per l'angolo (tra $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ o tra $\vec{\mathbf{b}}$ ed $\vec{\mathbf{a}}$), essendo $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$.

È facile verificare che: $$\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}$$

e che: $$\vec{\mathbf{a}}\cdot(\alpha\vec{\mathbf{b}}) = (\alpha\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{b}} = \alpha(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})$$

Dalla figura

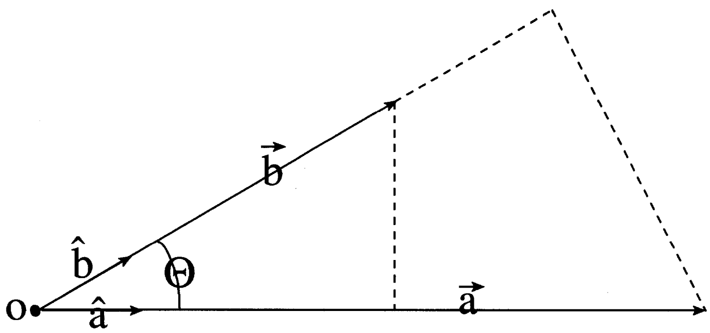


figura 9

risulta chiaro che $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}$ è la moltiplicazione della lunghezza di uno spostamento per la proiezione ortogonale dell'altro lungo la direzione del primo. In formule:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}|(|\vec{\mathbf{b}}|\cos\theta) = |\vec{\mathbf{a}}|(\vec{\mathbf{b}}\cdot\hat{\mathbf{a}}) =$$

$$= |\vec{\mathbf{b}}|(|\vec{\mathbf{a}}|\cos\theta) = |\vec{\mathbf{b}}|(\vec{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$$

In particolare: $$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2$$

SISTEMI DI COORDINATE (modi per dare "nomi" agli spostamenti):

<u>Nel piano</u>:

a) **Coordinate polari**: fissata un'origine O ed una semiretta uscente dall'origine

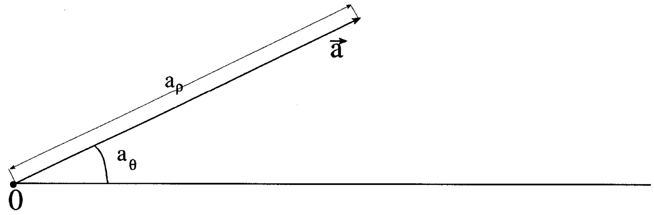


Figura n.10

lo spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ è univocamente definito dalla sua lunghezza $a_\rho = |\vec{\mathbf{a}}|$ e dall'angolo a_ϑ tra la semiretta scelta e lo spostamento, contato in senso antiorario a cominciare dalla semiretta.
a_ρ e a_ϑ si chiameranno le coordinate polari dello spostamento $\vec{\mathbf{a}}$.

b) **Coordinate cartesiane piane**: fissata un'origine e due semirette x e y uscenti dall'origine, non appartenenti alla stessa retta e non necessariamente ortogonali tra loro

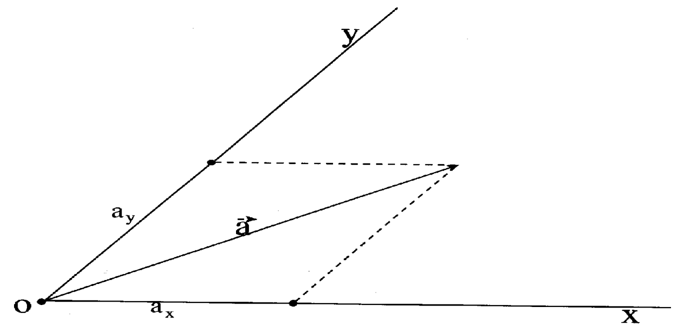


Figura n.11

lo spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ è univocamente determinato dalle lunghezze a_x e a_y dei segmenti che congiungono l'origine con l'intersezione con ciascun asse della parallela all'altro asse portata dal punto estremo di $\vec{\mathbf{a}}$, con segni positivi o negativi a seconda che le intersezioni stiano sulla semiretta o sulla sua continuazione nel verso opposto. Se chiamiamo con $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ i versori delle direzioni positive delle semirette x e y si noterà che

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}$$

ma che in generale a_x <u>non è</u> la proiezione ortogonale di $\vec{\mathbf{a}}$ sulla semiretta x ($\vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{i}} \neq a_x$) e che altrettanto vale per a_y

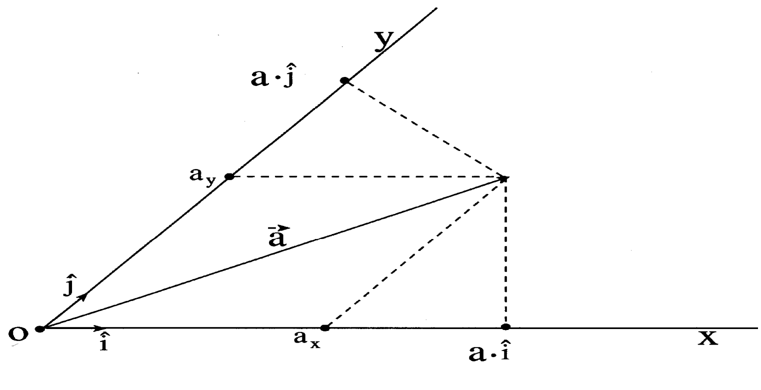
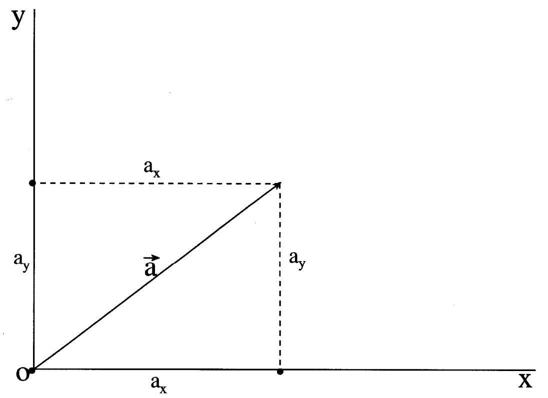


Figura n.12

Le semirette x e y si dicono assi cartesiani (piani) e a_x e a_y le coordinate (o componenti) cartesiane dello spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ lungo gli assi x e y.

Le uguaglianze $a_x = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{i}}$ e $a_y = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$ si verificano soltanto se x e y sono perpendicolari (coordinate cartesiane ortogonali piane), nel qual caso si ha inoltre:



$$|\vec{\mathbf{a}}|^2 = a_x^{\,2} + a_y^{\,2}$$

Figura n.13

Nello spazio:

a) **Coordinate sferiche**: fissati arbitrariamente un'origine, una semiretta uscente dall'origine ed un qualunque piano che la contenga (piano di riferimento), ad ogni spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ sono univocamente associati
- la sua lunghezza $a_\rho = |\vec{\mathbf{a}}|$,
- l'angolo a_ϑ che lo spostamento fa con la semiretta scelta (la (co-) latitudine del punto finale del segmento sulla sfera di raggio $|\vec{\mathbf{a}}|$)
- e l'angolo a_φ che il piano individuato da $\vec{\mathbf{a}}$ e dalla semiretta scelta fa con il piano di riferimento (longitudine). a_φ è contato in senso antiorario a partire dal piano di riferimento.

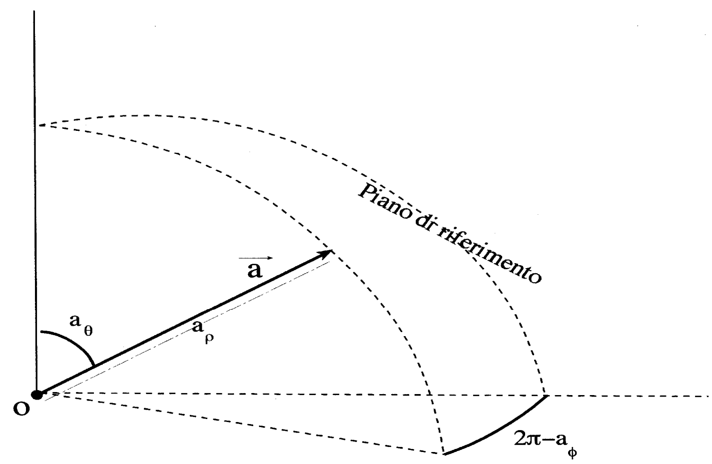


Figura n.14

a_ρ , a_ϑ e a_φ si dicono coordinate sferiche dello spostamento $\vec{\mathbf{a}}$.

b) **Coordinate cilindriche**: fissate una prima semiretta uscente dall'origine e, sul piano ad essa perpendicolare passante per l'origine, una seconda semiretta uscente dall'origine, ad ogni spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ sono univocamente associati
- la distanza a_z dell'estremo di $\vec{\mathbf{a}}$ dal piano, positiva se l'estremo si trova dalla stessa parte della prima semiretta, negativa in caso contrario,
- la lunghezza a_ρ della proiezione ortogonale di $\vec{\mathbf{a}}$ sul piano,
- e l'angolo a_ϑ formato da tale proiezione con la seconda semiretta scelta sul piano, contato in senso antiorario a partire dalla semiretta.

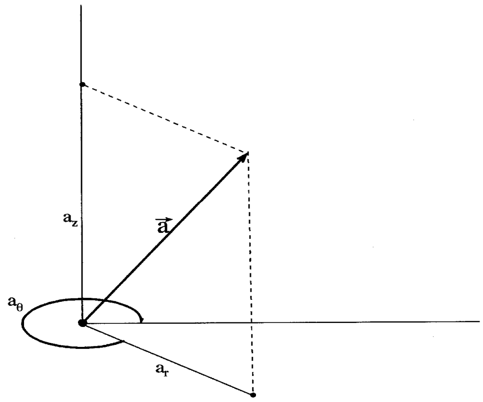


Figura n. 15

a_z , a_ρ e a_ϑ si diranno le coordinate cilindriche dello spostamento $\vec{\mathbf{a}}$.

c) **Coordinate cartesiane**: fissate tre semirette x, y, z (assi) uscenti dall'origine, non giacenti su di uno stesso piano, non necessariamente a due a due ortogonali tra loro, ad ogni spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ sono univocamente associate le lunghezze a_x , a_y , a_z dei tre segmenti che, su ciascun asse, congiungono l'origine con il punto di intersezione tra l'asse ed il piano parallelo agli altri due assi passante per l'estremo di $\vec{\mathbf{a}}$, con segno positivo o negativo a seconda che l'intersezione giaccia sulla semiretta o sulla sua continuazione nel verso opposto.
Se $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$ indicano i versori delle semirette x, y, z si noterà che

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x \vec{\mathbf{i}} + a_y \vec{\mathbf{j}} + a_z \vec{\mathbf{k}}$$

ma, come nel caso del piano, in generale $a_x \neq \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{i}}$ $\quad a_y \neq \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{j}}$ $\quad a_z \neq \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{k}}$.

La terna x, y, z si dice ortogonale se le tre semirette sono a due a due ortogonali . In tal caso a_x , a_y e a_z (coordinate cartesiane ortogonali di $\vec{\mathbf{a}}$) sono anche le proiezioni ortogonali dello spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ sugli assi:

$$a_x = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{i}} \qquad a_y = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{j}} \qquad a_z = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{k}}.$$

Si noti che, scelte le semirette x, y, z si verifica uno dei due casi:
- possono essere messe in corrispondenza, nell'ordine dato, con pollice indice e medio della mano destra (terna destrorsa),
- possono essere messe in corrispondenza, nell'ordine dato, con pollice indice e medio della mano sinistra (terna sinistrorsa).
(Pensate ad altri modi di caratterizzare la "parità" di una terna).
È facile verificare che la caratteristica di essere destrorsa o sinistrorsa si mantiene per permutazione ciclica dei nomi assegnati agli assi (x, y, z $\rightarrow$ y, z, x $\rightarrow$ z, x, y), mentre cambia se la permutazione non è ciclica o se un numero dispari di semirette viene sostituito con le semirette di verso opposto (x, y, z $\rightarrow$ y, x, z oppure x, y, z $\rightarrow$ -x, y, z oppure x, y, z $\rightarrow$ -x, -y, -z).

L'insieme degli spostamenti, con la sua struttura algebrica (somma e prodotto per uno scalare) e metrica (prodotto scalare), definisce lo "spazio vettoriale euclideo" a due e tre dimensioni che viene studiato, in un ambito di maggiore generalità, nel corso di Geometria. Tramite gli spostamenti è possibile costruire figure piane (ad esempio i poligoni regolari, cerchi etc) e delimitare regioni dello spazio (ad esempio i solidi regolari) le cui proprietà ci sono state insegnate nei primi anni di scuola (sempre sotto il nome di Geometria, una omonimia non sempre chiara agli studenti universitari, neppure dopo l'aggiunta di "analitica" che spesso si associa alla Geometria del corso universitario).
Tra le proprietà provate per le figure geometriche ricordiamo per esempio:
- la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°;
- per un triangolo qualunque vale il teorema di Carnot (in particolare vale il teorema di Pitagora per triangoli rettangoli). Infatti:

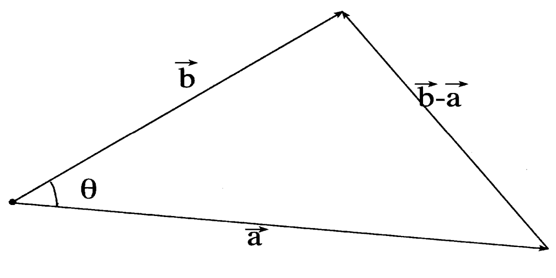


Figura n.16

$$|\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{(\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}})\cdot(\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}})} = \sqrt{|\vec{\mathbf{b}}|^2+|\vec{\mathbf{a}}|^2-2\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}}$$

$$= \sqrt{|\vec{\mathbf{b}}|^2+|\vec{\mathbf{a}}|^2-2|\vec{\mathbf{b}}||\vec{\mathbf{a}}|\cos\vartheta}$$

- il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo raggio vale 2π.

Come abbiamo già notato nei commenti alla definizione di spostamento gli enti geometrici punto, retta etc. sembrano adatti a descrivere lo spazio intorno a noi; gli assiomi della geometria euclidea (per esempio quello delle parallele) sembrano perfettamente soddisfatti da "punti e rette reali" e le loro conseguenze sono pertanto proprietà ben verificate nei cerchi e nei triangoli che possiamo fisicamente disegnare o ricostruire strumentalmente, almeno sulle scale di lunghezza accessibili all'esperienza quotidiana (anche se raffinata dall'uso di sofisticati strumenti scientifici). La verifica sperimentale della validità della geometria euclidea come modello per lo spazio diventa però

problematica nell'infinitamente piccolo e nell'infinitamente grande, o in condizioni comunque molto diverse dall'esperienza quotidiana.
Alla fine del secolo scorso fu dimostrata la non contraddittorietà di geometrie basate su insiemi di assiomi differenti da quelli della geometria euclidea. Quest'ultima rimase per qualche decennio la geometria che descriveva la realtà, ma perse lo status di unica geometria teoricamente possibile.
All'inizio di questo secolo (1915/1917) Einstein propose la teoria della Relatività Generale: lo spazio ed il tempo erano contemporaneamente descritti da una geometria a quattro dimensioni, la cui struttura era localmente tanto meno euclidea quanto più elevate erano le densità di materia e di energia presenti. Negli stessi anni la Meccanica Quantistica, nata per descrivere la dinamica delle particelle che costituiscono gli atomi, poneva severe limitazioni alla possibilità di usare concetti classici di "posizione" in ambito microscopico.
Esperimenti di grande precisione hanno dimostrato la validità della Relatività Generale su grande scala (rimane ancora aperto il problema di costruire una teoria che inglobi Relatività Generale e Meccanica Quantistica): sono oggi disponibili strumenti tecnologici commerciali che calcolano i loro dati tenendo conto di correzioni dovute alla natura "non euclidea" dello spazio-tempo (ad esempio il GPS, strumento che fornisce la posizione sulla superficie terrestre tramite segnali provenienti da satellite, estensivamente utilizzato nella navigazione da diporto)
Per avere un'idea di come fattori di scala possano drasticamente cambiare la realtà delle osservazioni sulla geometria dello spazio circostante é utile riferirsi a superfici bidimensionali, che facilmente riusciamo a visualizzare, e domandarsi su quale scala la geometria euclidea piana risulterebbe ben verificata. Proviamo, ad esempio a domandarci:
- sulla superficie di una sfera di raggio R, fissati tre punti e tracciate le linee più corte che li congiungono, su quale scala di dimensioni lineari la somma degli angoli interni della figura così definita è di 180° ?
- sulla superficie di una sfera o di una "sella", su che scala di dimensioni lineari il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo raggio vale 2π?

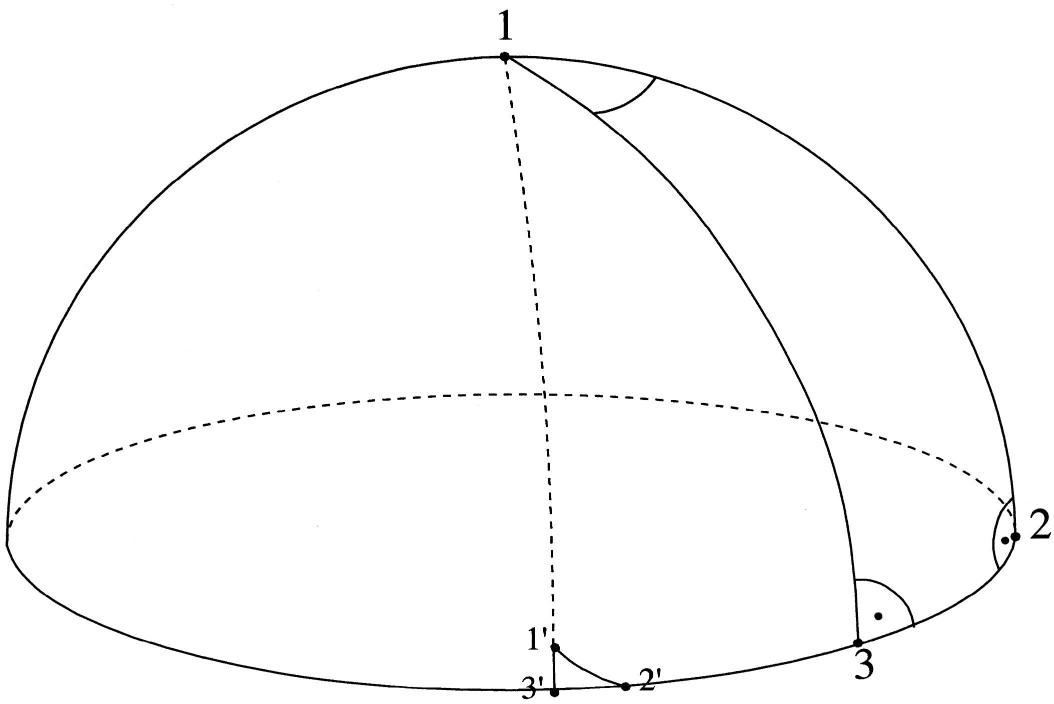
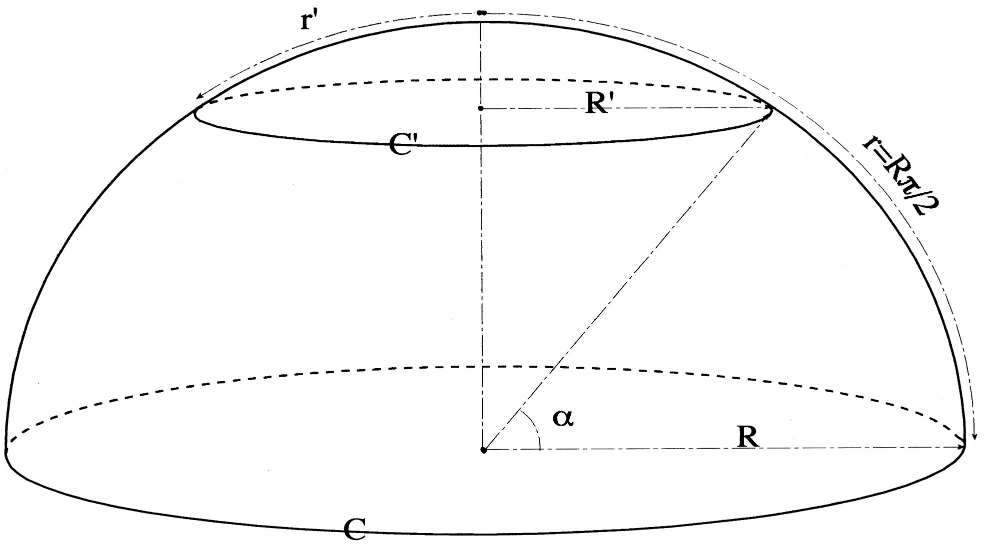


Figura 17,1

Figura 17,2



$C/r = 2\pi R/R\pi/2 = 4 < 2\pi$

$C'/r' = 2\pi R'/r' = 2\pi R\cos\alpha/r' = 2\pi R\cos(\pi/2 - r'/R)/r'$

$= 2\pi\, \mathrm{sen}(r'/R)/r'/R$

$|C'/r' - 2\pi| < \pi(r'/R)^2/3$

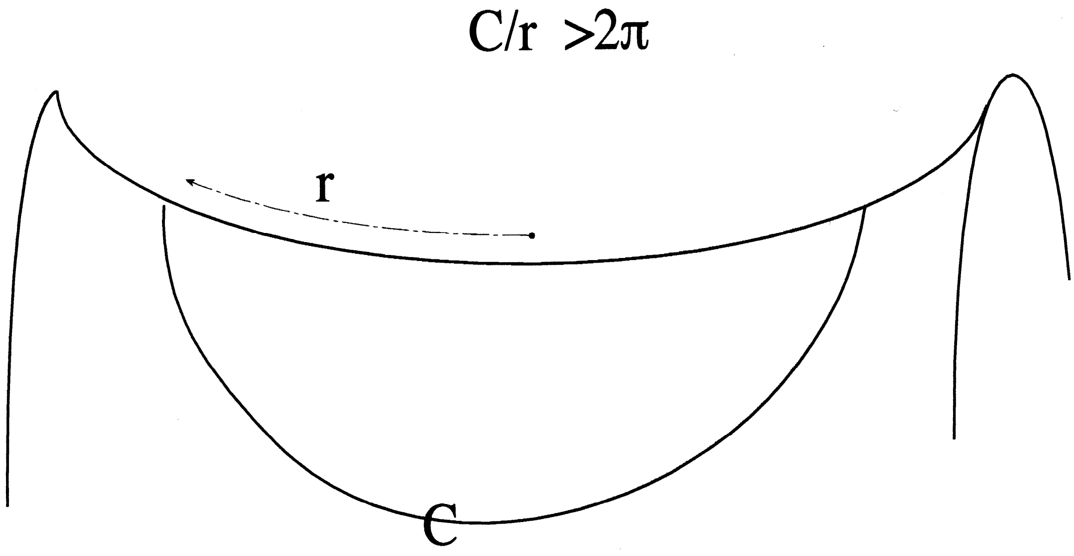


Figura 17,3

LE OPERAZIONI SUGLI SPOSTAMENTI NEI VARI SISTEMI DI COORDINATE

Le operazioni sugli spostamenti sono state definite in maniera intrinseca cioè senza fare riferimento al sistema di coordinate con cui gli spostamenti venivano individuati. Vediamo ora come si scrivono le stesse operazioni sui numeri che individuano gli spostamenti nei vari sistemi di coordinate.

Nel piano:

a) Somma:

1) Coordinate cartesiane ortogonali

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_x, a_y) \qquad \vec{\mathbf{b}} \equiv (b_x, b_y)$$

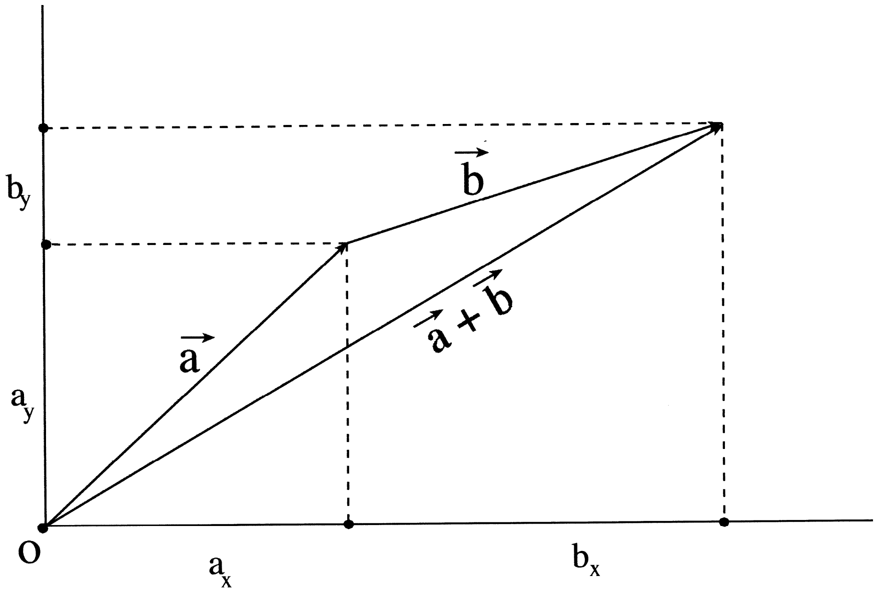


Figura n.18

Evidentemente si ha $$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})_x = a_x + b_x$$

$$[(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\cdot\hat{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{b}}\cdot\hat{\mathbf{i}}]$$

Analogamente $$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})_y = a_y + b_y$$

2) Coordinate cartesiane non ortogonali

Anche in questo caso si ha $$\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (a_x + b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\hat{\mathbf{j}}$$

3) Coordinate polari

Le formule che descrivono la somma di due spostamenti, assegnati in coordinate polari piane, non si scrivono in forma semplice. È in generale più conveniente calcolare l'espressione della somma in coordinate cartesiane e trasformarle successivamente in coordinate polari piane.

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_\rho, a_\vartheta) \qquad \vec{\mathbf{b}} \equiv (b_\rho, b_\vartheta)$$

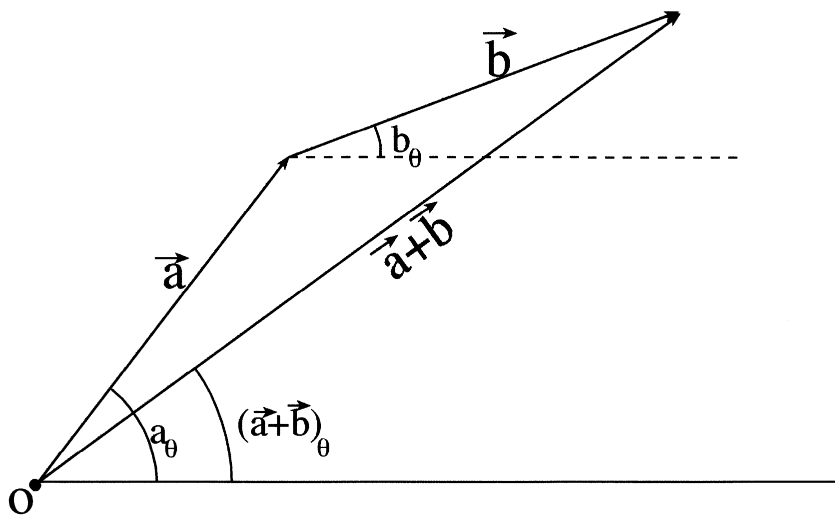


Figura n.19

$$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})_\rho = |\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{|\vec{\mathbf{a}}|^2 + |\vec{\mathbf{b}}|^2 + 2\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}} =$$

$$= \sqrt{a_\rho^{\ 2} + b_\rho^{\ 2} + 2a_\rho b_\rho(\cos a_\vartheta \cos b_\vartheta + \operatorname{sen} a_\vartheta \operatorname{sen} b_\vartheta)}$$

$$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})_\vartheta = \arccos\frac{(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})_x}{|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|} = \arccos\frac{a_x + b_x}{(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})_\rho}$$

essendo $a_x = a_\rho \cos a_\vartheta$

$b_x = b_\rho \cos b_\vartheta$

$$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})_\vartheta = \arccos\frac{a_\rho \cos a_\vartheta + b_\rho \cos b_\vartheta}{\sqrt{a_\rho^{\ 2} + b_\rho^{\ 2} + 2a_\rho b_\rho(\cos a_\vartheta \cos b_\vartheta + \operatorname{sen} a_\vartheta \operatorname{sen} b_\vartheta)}}$$

b) <u>Prodotto per uno scalare</u>

1) Coordinate cartesiane ortogonali

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_x, a_y) \qquad \lambda \text{ reale}$$

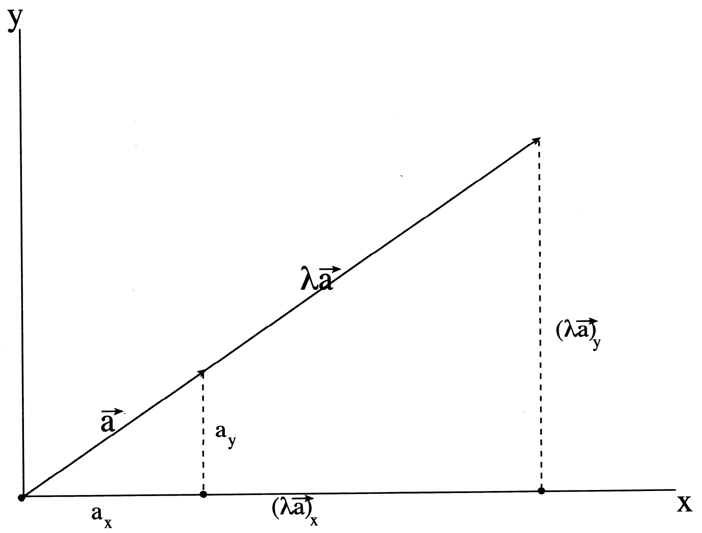


Figura n.20

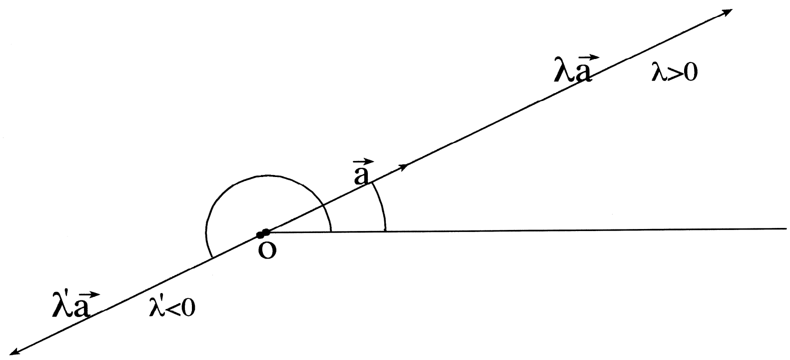
Dalla similitudine dei triangoli risulta che

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_x = \lambda a_x$$

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_{\mathrm{y}} = \lambda a_y$$

Verificate che la stessa cosa è vera per coordinate cartesiane non ortogonali.

2) Coordinate polari



$$\vec{\mathbf{a}} = (a_\rho, a_\theta) \qquad\qquad \lambda \ \text{reale}$$

Figura n.21

Si ha

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_\rho = |\lambda| a_\rho = |\lambda||\vec{\mathbf{a}}|$$

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_\vartheta = a_\vartheta \qquad \text{se } \lambda > 0$$

$$= \pi + a_\vartheta \quad \text{se } \lambda < 0$$

c) Prodotto scalare

1) Coordinate cartesiane ortogonali

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_x, a_y) \qquad \vec{\mathbf{b}} \equiv (b_x, b_y)$$

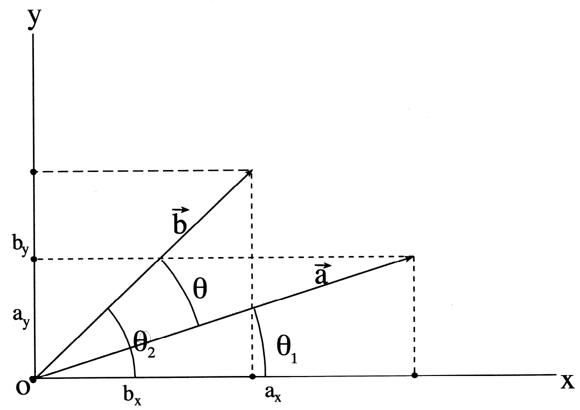


Figura n.22

Poiché $\qquad \cos\vartheta = \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_1$

e inoltre $\qquad \cos\vartheta_1 = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \cos\vartheta_2 = \frac{b_x}{|\vec{b}|} \qquad \sin\vartheta_1 = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \sin\vartheta_2 = \frac{b_y}{|\vec{b}|}$

si ha $\qquad \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \equiv |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\vartheta = a_x b_x + a_y b_y$

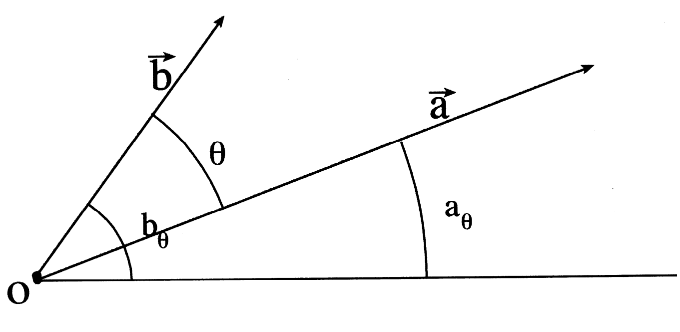
In alternativa alla dimostrazione precedente possiamo ottenere il riultato dalle proprietà dei versori degli assi come segue:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}})(b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}}) = a_x b_x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_y b_y \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_x b_y \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_y b_x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y \qquad \text{essendo} \qquad \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$$

La formula risulta più complicata in coordinate cartesiane non ortogonali poiché contiene coseni e seni degli angoli tra gli assi.

2) Coordinate polari



$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_\rho, a_\vartheta) \qquad \vec{\mathbf{b}} \equiv (b_\rho, b_\vartheta)$$

Figura n.23

Dalla stessa formula di addizione precedente con $\vartheta = b_\vartheta - a_\vartheta$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \equiv |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\vartheta = a_\rho b_\rho (\cos b_\vartheta \cos a_\vartheta + \operatorname{sen} b_\vartheta \operatorname{sen} a_\vartheta)$$

Nello spazio (in sintesi)

a) <u>Somma</u>

1) Coordinate cartesiane ortogonali

$$(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})_x = a_x + b_x \qquad (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})_y = a_y + b_y \qquad (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})_z = a_z + b_z$$

Le formule per la somma risultano complesse negli altri sistemi di coordinate e non verranno riportate qui.

b) <u>Prodotto per uno scalare</u>

1) Coordinate cartesiane ortogonali

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_x, a_y, a_z) \qquad \lambda \text{ reale}$$

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_x = \lambda a_x \qquad (\lambda\vec{\mathbf{a}})_y = \lambda a_y \qquad (\lambda\vec{\mathbf{a}})_z = \lambda a_z$$

2) Coordinate sferiche

$$\vec{\mathbf{a}} = (a_\rho, a_\theta, a_\varphi) \qquad \lambda \text{ reale}$$

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_\rho = |\lambda| a_\rho = |\lambda||\vec{\mathbf{a}}|$$

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_\vartheta = a_\vartheta \qquad \text{se } \lambda > 0$$

$$= \pi + a_\vartheta \qquad \text{se } \lambda < 0$$

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_\varphi = a_\varphi \qquad \text{se } \lambda > 0$$

$$= \pi + \varphi \qquad \text{se } \lambda < 0$$

3) Coordinate cilindriche

$$\vec{\mathbf{a}} = (a_z, a_\rho, a_\varphi) \qquad \lambda \text{ reale}$$

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})_z = \lambda a_z \qquad (\lambda\vec{\mathbf{a}})_\rho = \lambda a_\rho \qquad (\lambda\vec{\mathbf{a}})_\vartheta = a_\vartheta \quad \text{se } \lambda > 0$$

$$= \pi + a_\vartheta \quad \text{se } \lambda < 0$$

c) Prodotto scalare

1) Coordinate cartesiane ortogonali

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_x, a_y, a_z) \qquad \vec{\mathbf{b}} \equiv (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \equiv |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos \vartheta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

2) Coordinate sferiche

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv (a_\rho, a_\vartheta, a_\varphi) \qquad \vec{\mathbf{b}} \equiv (b_\rho, b_\vartheta, b_\varphi)$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \equiv |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos \vartheta = a_\rho b_\rho (\cos b_\vartheta \cos a_\vartheta + \operatorname{sen} b_\vartheta \operatorname{sen} a_\vartheta \cos(a_\varphi - b_\varphi)$$

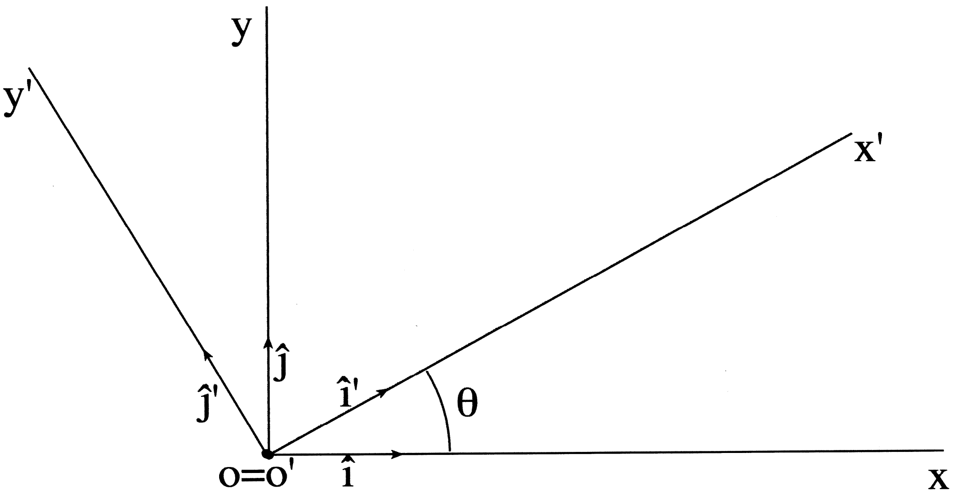
Il calcolo è complicato in coordinate cilindriche e non verrà riportato qui.

N.B. Le operazioni sugli spostamenti risultano particolarmente semplici in coordinate cartesiane ortogonali. Essendo operazioni lineari (somma e moltiplicazione per uno scalare) e bilineari (prodotto scalare) non deve stupire che assumano una forma semplice sugli spostamenti quando questi vengono rappresentati come combinazioni lineari di tre spostamenti ortogonali unitari. Inoltre le operazioni definite in coordinate cartesiane ortogonali si generalizzano immediatamente a qualunque dimensione e per questo sono le uniche coordinate che appaiono nello studio degli spazi vettoriali (vedi corso di Geometria).

CAMBIO DI COORDINATE PER CAMBIO DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI

Piano :

Se $\vec{\mathbf{a}}$ è uno spostamento di coordinate a_x e a_y nel sistema cartesiano ortogonale definito dalle semirette x e y, quali sono le sue coordinate relativamente ad un altro sistema cartesiano ortogonale definito da due semirette x' e y' di origine coincidente con il primo sistema? Cominciamo considerando il caso descritto in figura dove x' e y' si ottengono per rotazione di un



angolo θ dagli assi originari x e y.

Figura n.24

Se $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}}'$ sono i versori rispettivamente degli assi x, y e x', y' si ha per ogni spostamento $\vec{\mathbf{a}}$:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} \qquad \text{con} \qquad a_x = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{i}} \ \text{ e } \ a_y = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = a_{x'} \hat{\mathbf{i}}' + a_{y'} \hat{\mathbf{j}}' \qquad \text{con} \qquad a_{x'} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{i}}' \ \text{ e } \ a_{y'} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{j}}'$$

Da cui

$$a_{x'} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{i}}' \overset{\text{dalla prima}}{=} a_x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}' + a_y \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}}' = a_x \cos\theta + a_y \operatorname{sen}\theta$$

$$a_{y'} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{j}}' \overset{\text{dalla prima}}{=} a_x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}}' + a_y \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}}' = -a_x \operatorname{sen}\theta + a_y \cos\theta$$

Analogamente per la trasformazione inversa si ha

$$a_x = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{i}} \overset{\text{dalla seconda}}{=} a_{x'} \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_{y'} \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} = a_{x'} \cos\theta - a_{y'} \operatorname{sen}\theta$$

$$a_y = \vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{j}} \overset{\text{dalla seconda}}{=} a_{x'} \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_{y'} \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} = a_{x'} \operatorname{sen}\theta + a_{y'} \cos\theta$$

Si noti che la trasformazione che lega le a_x, a_y alle $a_{x'}, a_{y'}$ è una trasformazione lineare che non dipende da $\vec{\mathbf{a}}$, ma solo dal parametro θ che individua la rotazione che porta x , y su x' , y'
Le componenti di ogni spostamento si trasformano allo stesso modo.

È ovvio dalla definizione intrinseca di prodotto scalare ed è facile da verificare direttamente dalle formule di trasformazione, che, per ogni coppia di spostamenti $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ il numero $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ (quindi in particolare $|\vec{\mathbf{a}}|$ e $|\vec{\mathbf{b}}|$) non cambiano per cambiamento di assi cartesiani.
Infatti

$$a_x b_x + a_y b_y \; = \; \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \; = \; a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'}$$

(nel calcolo dell'espressione del prodotto scalare in coordinate cartesiane non si faceva riferimento a nessun specifico sistema di assi ortogonali)

Si noti che un altro tipo di cambiamento di assi ortogonali si ottiene con la trasformazione di inversione di uno degli assi x , y → x , -y , trasformazione che non si può ottenere per rotazione

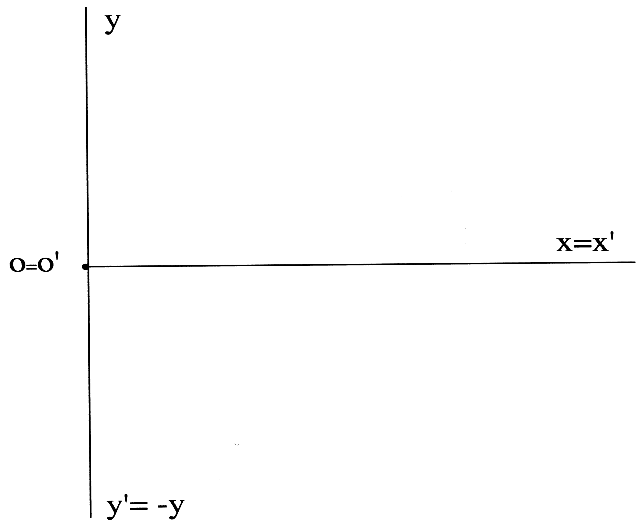


Figura n.25
Ancora il prodotto scalare assumerà lo stesso valore nei due sistemi di assi. L'inversione infatti, cambiando i segni delle seconde componenti di entrambi i vettori, ne lascia invariato il prodotto.
Ci si convince subito che ogni sistema di assi cartesiani ortogonali nel piano x', y' si può ricavare da x , y , aventi la stessa origine, per rotazione seguita eventualmente da un'inversione di assi (basterà sovrapporre x a x' con una rotazione, y coinciderà allora con y' o con -y'). Abbiamo dunque provato che per qualunque cambiamento di assi cartesiani ortogonali piani (rotazioni + inversioni) il prodotto scalare di due spostamenti qualunque (in particolare la lunghezza di qualunque spostamento) rimane invariato.
N.B. Il numero $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ non gode di questa proprietà di invarianza per il solo fatto di essere un numero. Anche la prima componente di un qualunque spostamento $\vec{\mathbf{a}}$ è un numero, ma varia per cambiamento di assi cartesiani ortogonali.
È facile dimostrare che anche il viceversa è vero: ogni trasformazione lineare invertibile delle componenti degli spostamenti che lasci invariata la loro lunghezza è una rotazione al più seguita da un'inversione (gruppo delle trasformazioni ortogonali del piano O(2)).

Spazio:

Con qualche complicazione in più dovuta al fatto che una rotazione non é più definita da un solo angolo (da quanti?), si ripetono le considerazioni fatte nel caso piano.

Le inversioni di asse danno luogo a trasformazioni particolarmente semplici. Per esempio

$$x' = -x \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$a_{x'} = -a_x \qquad a_{y'} = a_y \qquad a_{z'} = a_z$$

e, nel caso di inversione di tutti gli assi

$$x' = -x \qquad y' = -y \qquad z' = -z$$

$$a_{x'} = -a_x \qquad a_{y'} = -a_y \qquad a_{z'} = -a_z$$

Ancora una volta tutte e sole le trasformazioni lineari invertibili delle coordinate degli spostamenti che lasciano invariate le lunghezze di ogni spostamento sono le rotazioni e le inversioni di uno o più assi (gruppo delle trasformazioni ortogonali 0(3)).
È facile inoltre convincersi che il risultato vi è già noto dal corso di Geometria in qualunque dimensione (gruppo O(n)).

VETTORI

Abbiamo definito l'insieme degli spostamenti, le operazioni algebriche sugli spostamenti e come essi si trasformano per cambiamento di assi cartesiani di riferimento.
Come abbiamo già osservato questo insieme astratto sembra modellare perfettamente la struttura dello spazio fisico. In particolare lo utilizzeremo nell'immediato futuro per descrivere la "scena" in cui avviene il moto dei corpi.
Sperimentalmente si verifica che varie grandezze fisiche sono ben rappresentate da strutture identiche a quella introdotta per gli spostamenti: queste grandezze richiederanno lo stesso insieme di numeri per essere specificate (denominate da ora in poi componenti e non coordinate per sottolineare che non si tratta necessariamente di spostamenti o punti del piano o dello spazio), avranno le stesse regole di somma, e le loro componenti cartesiane si trasformeranno nello stesso modo per rotazione ed inversione degli assi cartesiani ortogonali di riferimento.
I valori possibili di queste grandezze saranno, come gli spostamenti, ben rappresentati da elementi di questo "spazio vettoriale euclideo a due o tre dimensioni" , pur non avendo niente a che fare, in generale, con spostamenti, posizioni spaziali e neppure lunghezze.
Ogni elemento di questo insieme verrà da ora definito generalmente come vettore .
La radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti cartesiane di un vettore (la lunghezza nel caso degli spostamenti) sarà detto modulo del vettore.
Si dirà grandezza vettoriale ogni grandezza fisica che abbia le proprietà, verificate sperimentalmente, di un vettore (come lo spostamento).
Esempi di grandezze vettoriali sono lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza, la quantità di moto etc.

Ogni grandezza fisica che, come il prodotto scalare tra due spostamenti, è definita da un numero che non varia per rotazione e inversione degli assi del sistema cartesiano ortogonale di riferimento si dice grandezza scalare .(Come notato precedentemente non è sufficiente che una grandezza sia espressa attraverso un numero perché sia una grandezza scalare)
Esempi di grandezze scalari sono: la lunghezza di uno spostamento, l'area, il volume, la temperatura, la massa, la densità, la carica elettrica etc.

Prodotto vettoriale: dati due vettori $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ si definisce prodotto vettoriale il "vettore" $\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}$ (vedi oltre per comprendere il significato delle virgolette) che ha direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$, modulo

$$|\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}| \; = \; |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \operatorname{sen} \vartheta$$

e verso tale che $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ e $\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}$ formino una terna destrorsa (nell'espressione del modulo ϑ indica l'angolo minore di π tra $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$).
Si noti che la definizione di prodotto vettoriale è intrinsecamente tridimensionale e non è estendibile a una e due dimensioni.

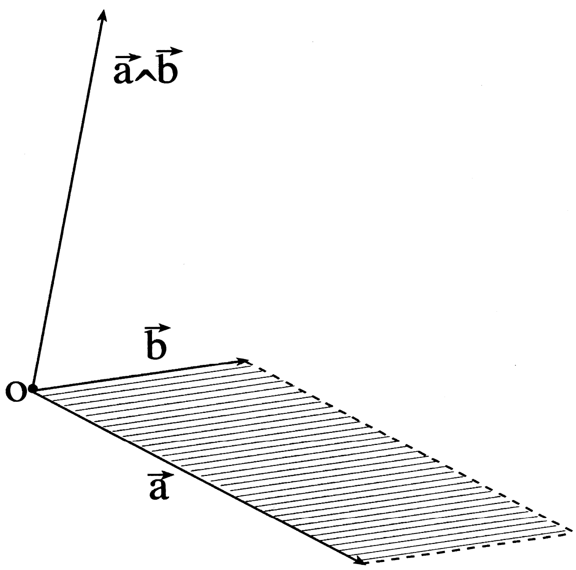


Figura n.26

Si noti che se $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ rappresentano due spostamenti , $|\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}|$ è l'area del parallelogramma individuato da $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$.
Se $\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \; = \; \vec{\mathbf{0}}$ i vettori $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ hanno necessariamente la stessa direzione. Esiste dunque un λ tale che $\vec{\mathbf{a}} = \lambda \vec{\mathbf{b}}$ con λ positivo o negativo a seconda che $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ siano paralleli o antiparalleli.

Dalla definizione si vede facilmente che

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \; = \; -\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}}$$

e che

$$(\lambda \vec{\mathbf{a}}) \wedge \vec{\mathbf{b}} \; = \; \vec{\mathbf{a}} \wedge (\lambda \vec{\mathbf{b}}) \; = \; \lambda (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \qquad \text{per ogni } \lambda \text{ reale}$$

Si dimostra che vale la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma

$$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\wedge\vec{\mathbf{c}} \;=\; \vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}}$$

Inoltre se $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ sono i versori degli assi di una terna cartesiana ortogonale destrorsa si ha

$$\hat{\mathbf{i}}\wedge\hat{\mathbf{j}} \;=\; -\hat{\mathbf{j}}\wedge\hat{\mathbf{i}} \;=\; \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}}\wedge\hat{\mathbf{k}} \;=\; -\hat{\mathbf{k}}\wedge\hat{\mathbf{j}} \;=\; \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}}\wedge\hat{\mathbf{i}} \;=\; -\hat{\mathbf{i}}\wedge\hat{\mathbf{k}} \;=\; \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{i}}\wedge\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}\wedge\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}}\wedge\hat{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{0}}$$

La tabella dei prodotti vettoriali dei versori e l'uso della distributività del prodotto vettoriale rispetto alla somma permettono di calcolare facilmente le componenti cartesiane di $\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}}$ in funzione delle componenti di $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$.:

$$\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}} \;=\; (a_x\hat{\mathbf{i}}+a_y\hat{\mathbf{j}}+a_z\hat{\mathbf{k}})\wedge(b_x\hat{\mathbf{i}}+b_y\hat{\mathbf{j}}+b_z\hat{\mathbf{k}}) \;=$$

$$=\;(a_yb_z-a_zb_y)\hat{\mathbf{i}}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{\mathbf{j}}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{\mathbf{k}}$$

da cui

$$(\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}})_x=(a_yb_z-a_zb_y)$$

$$(\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}})_y=(a_zb_x-a_xb_z)$$

$$(\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}})_z=(a_xb_y-a_yb_x)$$

Chi abbia un minimo di dimestichezza con la notazione matriciale noterà che le relazioni precedenti possono essere scritte in forma compatta come sviluppo del determinante:

$$\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}} \;=\; \det\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}$$

N.B. Come abbiamo sottolineato nella definizione di vettore la natura vettoriale di una quantità deve essere verificata (non semplicemente asserita come abbiamo fatto per $\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}}$). La nostra definizione individua $\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}}$ con un modulo, una direzione ed un verso come accade per un vettore, ma implica anche una maniera specifica di cambiamento di coordinate per trasformazione ortogonale di assi, che non abbiamo ancora verificato essere quella caratteristica di un vettore.
Per rotazione della terna cartesiana di riferimento $\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}}$ cambia necessariamente come $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$ quindi come un vettore (questo può comunque essere verificato direttamente dalle trasformazioni per le componenti di $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$).
Per inversione totale degli assi x' = -x, y' = -y, z' = -z (la terna diventa sinistrorsa) si ha

$$(\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}})_x = a_y b_z - a_z b_y = (-a_{y'})(-b_{z'}) - (-a_{z'}) - (-b_{y'}) = (\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}})_{x'}$$

e analogamente per le altre componenti

Le componenti del prodotto vettoriale tra due vettori non cambiano dunque per inversione spaziale degli assi cartesiani.
Ogni quantità che, come il prodotto vettoriale tra due vettori, possiede tutte le caratteristiche di un vettore per rotazione della terna di riferimento, ma non cambia segno per inversione degli assi si dirà grandezza pseudovettoriale.

Si definisce triplo prodotto scalare di tre vettori $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, e $\vec{\mathbf{c}}$ il numero $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}})$. L'espressione del triplo prodotto in termini delle componenti cartesiane dei vettori $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, e $\vec{\mathbf{c}}$ deriva direttamente da quella del prodotto vettoriale

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}}) = a_x(\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}})_x + a_y(\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}})_y + a_z(\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}})_z =$$

$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$$

che in forma compatta si scrive

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}}) = \det\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, e $\vec{\mathbf{c}}$ siano spostamenti, essendo, come abbiamo visto, $|\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}}|$ pari all'area del parallelogramma costruito su $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$, il valore assoluto del triplo prodotto $|\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\wedge\vec{\mathbf{c}})|$ è pari al volume del parallelepipedo costruito sugli spostamenti $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, e $\vec{\mathbf{c}}$.

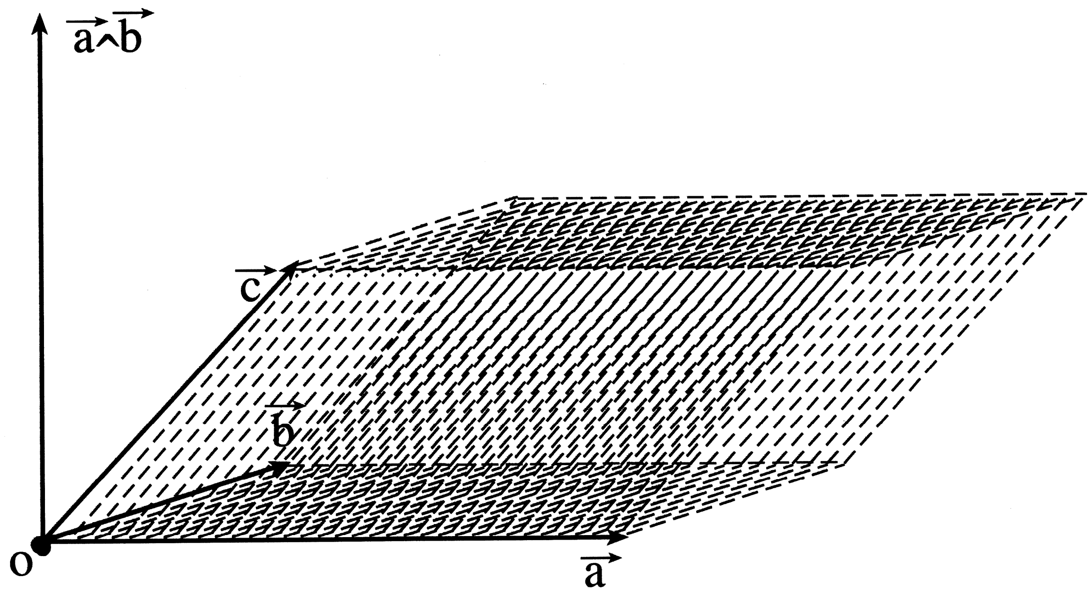


Figura n.27

In particolare il triplo prodotto è nullo se e solo se i tre spostamenti sono complanari.

Dal disegno, dalle proprietà del determinante, o da un calcolo diretto in coordinate cartesiane, si deduce facilmente che scambiando ciclicamente i tre vettori il triplo prodotto non cambia; se lo scambio non è ciclico il triplo prodotto cambia di segno.

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) =$$

$$= -\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) = -\vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) = -\vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) =$$

Concludiamo riportando due eguaglianze valide per il cosiddetto <u>triplo prodotto vettoriale</u>

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge \vec{\mathbf{c}} = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{a}}$$

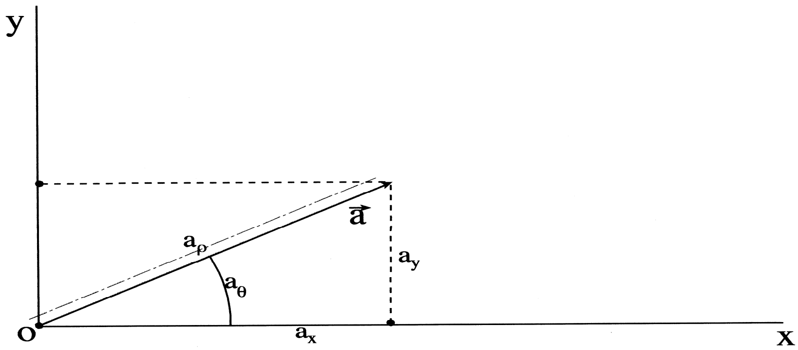
Si noti che in generale $\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) \neq (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge \vec{\mathbf{c}}$.

COMPLEMENTI ED ESERCIZI

Formule di trasformazione tra differenti sistemi di coordinate:

Piano

Dato un generico vettore $\vec{a}$ nel piano vogliamo trovare le formule di trasformazione che legano le sue coordinate cartesiane ortogonali e le sue coordinate polari, nell'ipotesi che i due sistemi abbiano la stessa origine e che l'asse cartesiano x coincida con l'asse origine degli angoli del sistema di



coordinate polari:

Figura 28

Dalla figura risulta chiara la seguente tabella di conversione

$$a_x = a_\rho \cos a_\vartheta \qquad a_y = a_\rho \operatorname{sen} a_\vartheta$$

$$a_\rho = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} \qquad a_\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{a_y}{a_x}$$

Spazio

Consideriamo tre sistemi di coordinate rispettivamente cartesiane ortogonali, sferiche e cilindriche, di origine comune nell'ipotesi che l'asse z delle coordinate cartesiane ortogonali e gli assi polari delle coordinate sferiche e cilindriche coincidano e che l'asse x delle coordinate cartesiane coincida con l'asse origine degli angoli azimutali delle coordinate sferiche e cilindriche:

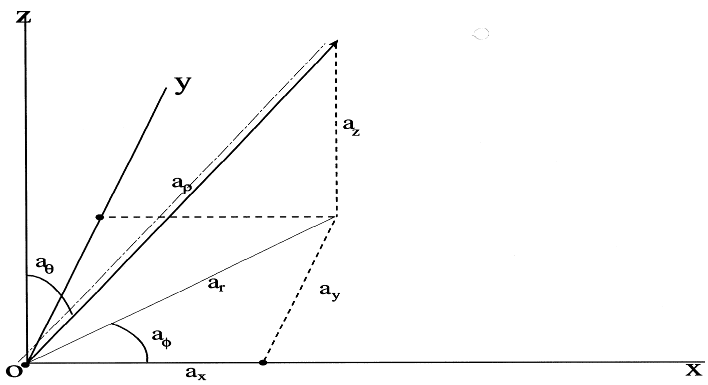


Figura 29

Dalla figura risulta:

Da sferiche a cartesiane ortogonali e viceversa

$$a_x = a_\rho \operatorname{sen} a_\vartheta \cos a_\varphi \quad a_y = a_\rho \operatorname{sen} a_\vartheta \operatorname{sen} a_\varphi \quad a_z = a_\rho \cos a_\vartheta$$

$$a_\rho = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad a_\vartheta = \arccos \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad a_\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_y}{a_x}$$

Da cilindriche a cartesiane ortogonali e viceversa

$$a_x = a_\rho \cos a_\varphi \quad a_y = a_\rho \operatorname{sen} a_\varphi \quad a_z = a_z$$

$$a_\rho = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad a_\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{a_y}}{\mathrm{a_x}}$$

Il passaggio da coordinate sferiche a cilindriche e viceversa è molto semplice e non lo riporteremo qui.